



Campagne de mesures astro-géodésiques à Zeuzier (VS)

Développement d'outils pour la détermination et la qualification de champs de gravité locaux

Matteo CASTO

Février 2026

Domaine Ingénierie et Architecture

Master conjoint UNIGE-HES-SO en développement territorial

Orientation Ingénierie géomatique

Encadrant : Prof. Dr Bertrand CANNELLE, HEIG-VD

Co-encadrant : Prof. Dr Sébastien GUILLAUME, HEIG-VD

Expert : Dr Urs MARTI, Office fédéral de topographie (swisstopo)

Mémoire n° : 1196

Résumé

Selon la loi de la gravitation universelle énoncée par Newton en 1687, tous les corps s'attirent mutuellement. Ainsi, un observateur est attiré par la Terre, mais aussi par toutes les masses qui l'entourent, comme une autre planète, une montagne ou un lac. Par conséquent, la gravité sur Terre n'est pas uniforme. Elle présente des variations liées, entre autres, à la topographie ainsi qu'à la distribution inhomogène des masses dans le sous-sol. Les régions alpines, caractérisées par des reliefs marqués et une géologie complexe, sont particulièrement concernées par ces variations. Si celles-ci restent imperceptibles dans la vie quotidienne, elles deviennent largement significatives dès lors que des exigences élevées de précision sont requises, notamment dans les domaines de la mesure et de la construction, où des tolérances centimétriques, voire millimétriques, sont recherchées.

Dans ce contexte, ce travail propose des méthodes et outils permettant de prédire la géométrie du champ de gravité terrestre, avec une haute précision à l'échelle locale. De plus, des simulateurs ont été mis en place et permettent de qualifier une détermination du champ de gravité avant même de procéder à des mesures sur le terrain. Ceci a été réalisé notamment à l'aide des générations procédurales de contrastes de densité géologique.

L'ensemble des développements réalisés a été appliqué à un cas réel, au barrage de Zeuzier en Valais (Suisse). Les résultats obtenus montrent que la méthodologie proposée permet d'estimer le champ de gravité avec des ordres de grandeur réalistes et des niveaux de précision compatibles avec les objectifs visés. Les simulations ont en outre démontré l'intérêt d'une pré-analyse avant toute campagne de terrain, permettant d'optimiser la configuration et le nombre d'observations nécessaires pour atteindre une précision souhaitée, tout en réduisant les coûts opérationnels associés.

Abstract

According to the law of universal gravitation formulated by Newton in 1687, all bodies attract each other. An observer is therefore attracted not only by the Earth, but also by all surrounding masses, such as another planet, a mountain, or a lake. As a consequence, gravity on Earth is not uniform. It exhibits spatial variations related, among other factors, to topography and to the inhomogeneous distribution of masses in the subsurface. Alpine regions, characterized by pronounced relief and complex geology, are particularly affected by these variations. While such effects remain imperceptible in everyday life, they become highly significant when stringent accuracy requirements are imposed, notably in the fields of measurement and construction, where centimetric or even millimetric tolerances are sought.

In this context, this work proposes methods and tools aimed at predicting the geometry of the terrestrial gravity field with high precision at the local scale. In addition, simulation tools have been developed to qualify a gravity-field determination even before any field measurements are carried out. This approach relies in particular on the procedural generation of geological density contrasts.

All developments presented in this work were applied to a real case study at the Zeuzier dam in Valais (Switzerland). The results obtained show that the proposed methodology makes it possible to estimate the gravity field with realistic orders of magnitude and precision levels consistent with the targeted objectives. The simulations further demonstrate the interest of performing a pre-analysis prior to any field campaign, enabling the optimization of the configuration and the number of observations required to achieve a given level of accuracy, while reducing the associated operational costs.

Avant-propos

Le présent Mémoire est réalisé au terme du Master conjoint HES-SO / UNIGE en Développement Territorial, orientation « Ingénierie géomatique ».

Ce document s'adresse principalement aux ingénieurs spécialistes de la géodésie. Toutefois, le résumé et l'introduction sont conçus pour rester accessibles à un lectorat disposant de bases générales en géomatique.

Remerciements

Au terme de mes études et de ce travail de Master, je tiens à remercier sincèrement les personnes suivantes :

- Les professeurs Dr Bertrand CANNELLE et Dr Sébastien GUILLAUME pour l'encadrement et leurs précieux conseils.
- Dr Urs MARTI de swisstopo, pour son expertise sur le champ de gravité.
- Le professeur Yves DEILLON pour sa grande expérience et son accompagnement durant le début de ma carrière professionnelle.
- Mme Milena SCRIGNARI de swisstopo, pour ses conseils sur quelques considérations géologiques.
- MM. Fabien DÉLÈZE et Kilian MOREL pour leur temps consacré à la relecture.
- L'ensemble de mes collègues, pour l'amitié, la bonne ambiance et la découverte de l'exceptionnelle plume d'Alexandre ASTIER.
- Ma conjointe, Alicia VOUILLAMOZ pour son soutien et son écoute tout au long de mes études.
- Ma famille et mes amis proches, pour leur précieux soutien.

Table des matières

Introduction	1
1 État de l'art	6
2 Bases théoriques	9
2.1 Mécanique newtonienne	9
2.1.1 Loi de la gravitation universelle	9
2.1.2 Principe de superposition	10
2.2 Notion de gravité en géodésie physique	11
2.3 Notion de potentiel	13
2.3.1 Caractère conservatif de la force gravitationnelle	13
2.3.2 Propriété d'additivité	14
2.3.3 Potentiel gravitationnel terrestre V	14
2.3.4 Potentiel centrifuge Z	16
2.3.5 Potentiel de gravité réel W	16
2.3.6 Potentiel normal U	17
2.3.7 Potentiel perturbateur T	17
2.4 Détermination de champs gravitationnels	19
2.4.1 Ensemble de masses ponctuelles	19
2.4.2 Polyèdre homogène	19
2.5 Géométrie et fonctionnelles du champ de gravité	22
2.5.1 Equipotentielle	22
2.5.2 Géoïde	22
2.5.3 Cote du géoïde	22
2.5.4 Ligne d'aplomb	23
2.5.5 Déviation de la verticale	23

2.6	Observations courantes du champ de gravité	25
2.6.1	Gravimétrie	25
2.6.2	Astro-géodésie	26
3	Modèle de masse de la topographie	28
3.1	Processus général	29
3.2	Paramètres d'entrée	30
3.3	Choix des résolutions	31
3.4	Modèle numérique de terrain (raster)	32
3.5	Rééchantillonnage	32
3.6	Nuage de points $\mathcal{P}_{\text{topo}}$	33
3.7	Excavation du volume des lacs	34
3.7.1	Emprise des lacs	34
3.7.2	Filtrage du nuage de points $\mathcal{P}_{\text{topo}}^{\text{R}}$	34
3.7.3	Génération du nuage de points du fond des lacs \mathcal{P}_{lac}	35
3.7.4	Nuage de points final $\mathcal{P}_{\text{topo+lac}}^{\text{R}}$	36
3.8	Polyèdre fermé	37
3.8.1	Surface supérieure	37
3.8.2	Détection du bord et construction du contour inférieur	37
3.8.3	Murs latéraux	38
3.8.4	Surface inférieure	39
3.8.5	Polyèdre final	39
4	Détermination de champs de gravité locaux	41
4.1	Modèle mixte de la Terre	42
4.2	Pré-traitements des observations brutes	42
4.2.1	Déviations de la verticale	42
4.2.2	GNSS-nivellement	43
4.3	Positions de prédiction	49
4.4	Méthode « remove-compute-restore »	50
4.4.1	Réduction des effets des modèles (remove)	50
4.4.2	Détermination du co-géoïde (compute)	52
4.4.3	Restauration des effets des modèles (restore)	58

5	Simulations en circuit fermé	60
5.1	Génération des masses non-modélisées $\delta\mathcal{M}$	62
5.1.1	Centres de voxels	63
5.1.2	Génération des contrastes de densité $\delta\rho_i$	65
5.2	Simulateur associé à N, η, ξ	78
5.2.1	Terre « vraie » δ_i d'une réalisation	78
5.2.2	Détermination des fonctionnelles et observations « vraies »	78
5.2.3	Génération des observations simulées	80
5.2.4	Détermination complète du champ de gravité	81
5.2.5	Métriques de précision	82
5.3	Simulateur associé à $E_{S_{AB}}^{\text{corr}}$	84
5.3.1	Détermination des observations « vraies »	85
5.3.2	Génération des observations simulées	86
5.3.3	Détermination de la correction orthométrique « vraie »	86
5.3.4	Métriques de précision	86
6	Conception et développement d'outils	87
6.1	Généralités	87
6.2	Principales bibliothèques externes utilisées	88
6.3	Interface graphique	89
6.4	Optimisations computationnelles	90
7	Expérimentation sur un cas réel : Zeuzier (VS)	92
7.1	Réalisation des mesures	94
7.1.1	Astro-géodésie	94
7.1.2	Gravimétrie	96
7.2	Pré-traitements	98
7.2.1	Déviations de la verticale	98
7.2.2	GNSS-nivellement	99
7.3	Détermination du champ de gravité local	103
7.3.1	Modèle de masse utilisé pour la détermination	103
7.3.2	Intégration dans un modèle régional	103
7.3.3	Choix de la fonction de covariance	104

7.3.4	Solution astro-géodésique pure	104
7.3.5	Solution astro-géodésique combinée au GNSS-nivellement	109
7.3.6	Impact du niveau du lac	111
7.4	Simulations en circuit fermé	113
7.4.1	Génération procédurale des contrastes de densité	113
7.4.2	Précision de la correction orthométrique	114
7.4.3	Précision des fonctionnelles du champ de gravité local	115
Conclusion et perspectives		123
Bibliographie		125
Annexes		137
A Code source		139
A.1	Organisation	139
A.2	Utilisation	140
B Modèle de masse de Zeuzier		142
C Déterminations du champ de gravité local à Zeuzier		143
D Simulations en circuit fermé à Zeuzier		144
E Canevas du réseau géodésique de Zeuzier		146

Introduction

Selon la loi de la gravitation universelle énoncée par Newton en 1687, tous les corps s'attirent mutuellement. Ainsi, un observateur est attiré par la Terre, mais aussi par toutes les masses qui l'entourent, comme une autre planète, une montagne ou un lac. Par conséquent, la gravité sur Terre n'est pas uniforme. Elle présente des variations liées, entre autres, à la topographie ainsi qu'à la distribution inhomogène des masses dans le sous-sol. Les régions alpines, caractérisées par des reliefs marqués et une géologie complexe, sont particulièrement concernées par ces variations. Si celles-ci restent imperceptibles dans la vie quotidienne, elles deviennent significatives dès lors que des exigences élevées de précision sont requises, notamment dans les domaines de la mesure et de la construction, où des tolérances centimétriques, voire millimétriques, sont recherchées. L'étude du champ de gravité terrestre relève du domaine de la *géodésie physique*.

Pour commencer, il est important de distinguer deux grands types d'éléments :

- Les éléments qui se rattachent à un espace cartésien global¹ dans lequel les principes de la géométrie euclidienne peuvent directement être appliqués. C'est par exemple le cas du positionnement GNSS, où une position est exprimée par des coordonnées dans un système de référence global (communément appelées « coordonnées GPS »), indépendamment des phénomènes physiques locaux. De la même manière, la forme ou la trajectoire d'un accélérateur de particules peut être décrite comme une ligne ou un plan dans un espace géométrique.
- Les éléments qui se rattachent naturellement à des phénomènes physiques réels comme la gravité. Par exemple, les surfaces d'eau, comme la mer ou un lac, matérialisent naturellement des surfaces de niveau. Si aucun obstacle est présent, alors l'eau cherche à traverser ces surfaces de manière successive et à devenir ainsi une rivière. Certains instruments de mesure illustrent également cette notion : un niveau de maçon, un fil à plomb ou une station totale se réfèrent à la verticale physique locale, perpendiculaire aux surfaces de niveau.

Il est tout à fait possible de relier les éléments soumis à un phénomène physique comme la gravité à un espace géométrique, et inversement. On parle alors de *géométrie du champ de gravité*. En d'autres termes, il est nécessaire d'avoir accès à certaines grandeurs (dites « fonctionnelles ») du champ de gravité, parmi lesquelles figurent notamment :

1. Espace mathématique idéalisé dans lequel les positions sont décrites uniquement par des coordonnées et des relations géométriques.

- La **déviatiion de la verticale**, qui décrit le petit écart angulaire entre la verticale géométrique d'un système de coordonnées et la direction réelle de la gravité (verticale physique) à une position donnée. En Suisse, l'ordre de grandeur de sa valeur est de ± 25 secondes d'arc ($''$). Autrement dit, cela représente un écart angulaire maximal de ≈ 1.2 cm à 100 m. Il est important de noter qu'une station totale moderne peut atteindre une précision de mesure angulaire d'environ $0.5''$, ce qui rend l'impact de la déviation de la verticale largement significatif. La figure 1 illustre cette notion et la manière dont elle est reliée aux surfaces de niveau du champ de gravité.

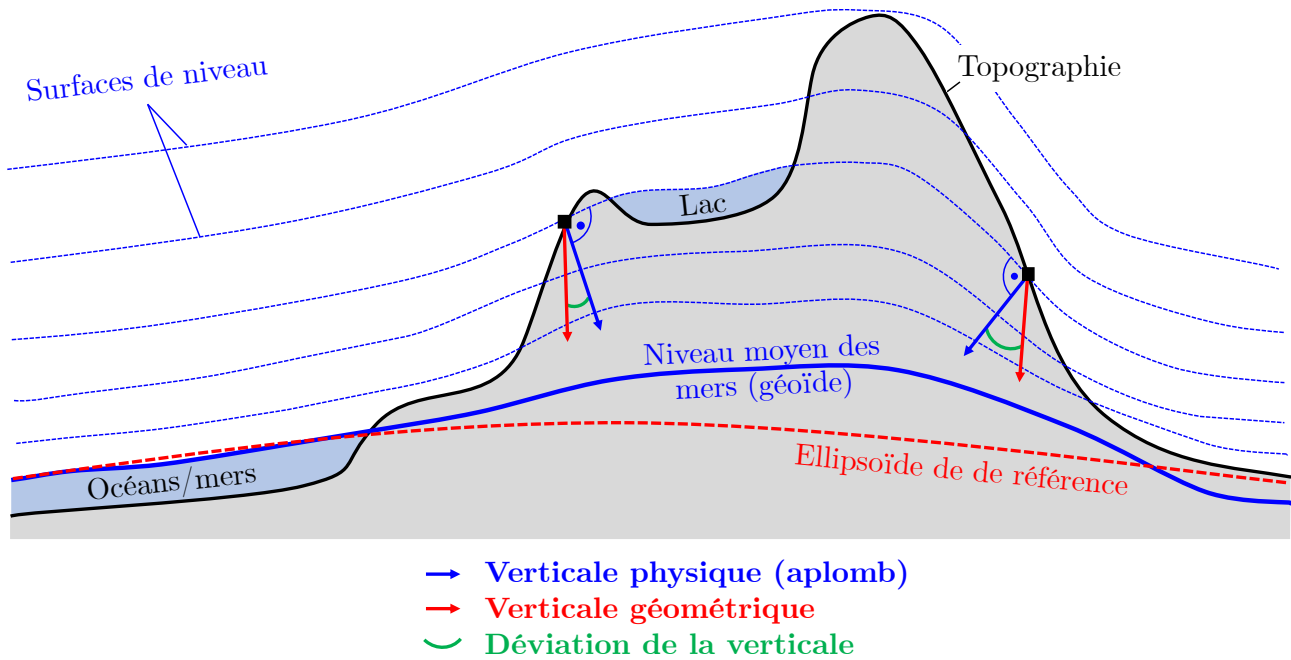
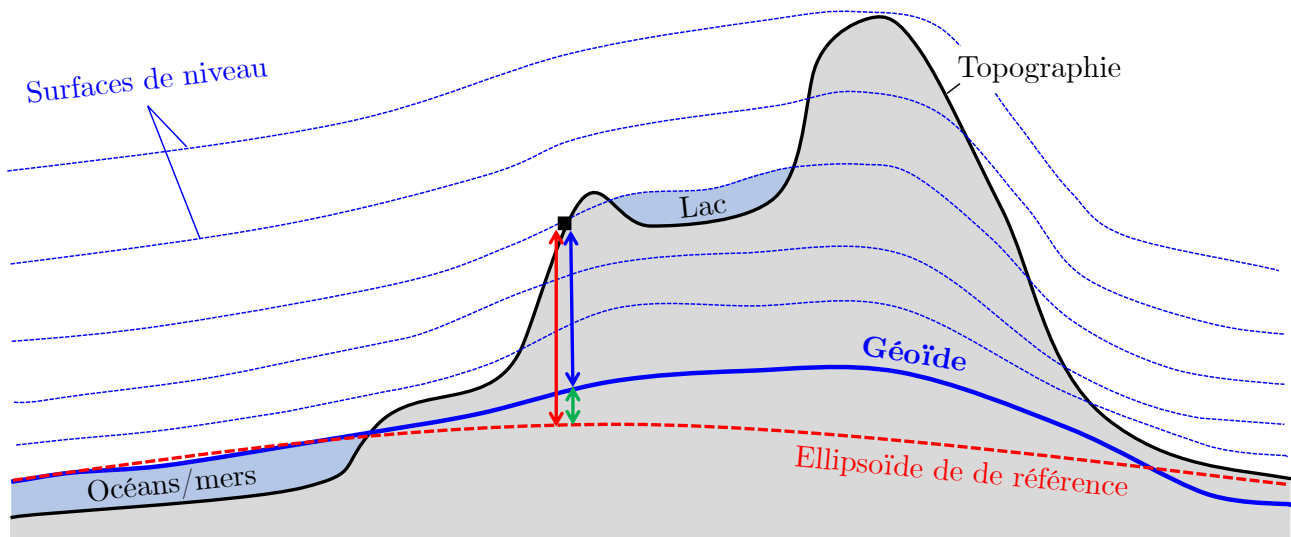


FIGURE 1 – Introduction à la notion de déviation de la verticale, vue en coupe. En rouge, les éléments géométriques. En bleu, les éléments se référant au champ de gravité.

- La **cote du géoïde**, qui représente la distance verticale entre l'ellipsoïde de référence² et la surface du niveau moyen des mers prolongé sous les continents (géoïde). Elle permet de relier une altitude géométrique issue du GNSS à une altitude physique utilisée en pratique. En Suisse, la cote du géoïde présente des variations comprises entre -3 et $+3$ m. À l'échelle locale (quelques kilomètres), des variations centimétriques sont facilement atteignables en montagne. À titre de comparaison, la précision d'une altitude mesurée par GNSS atteint 3 à 5 cm lors d'une utilisation sur un chantier et 2 à 3 mm lors d'une utilisation dans un réseau de mesures de précision. La figure 2 introduit cette notion ainsi que le rôle du géoïde comme surface de niveau de référence pour la définition des altitudes dites « au-dessus du niveau de la mer ».

². Surface géométrique proche de la forme moyenne de la Terre, utilisée pour définir un système de coordonnées



- ↔ Altitude «au dessus du niveau de la mer»
- ↔ Altitude géométrique
- ↔ Cote du géoïde

FIGURE 2 – Introduction à la notion de cote du géoïde, vue en coupe. En rouge, les éléments géométriques. En bleu, les éléments se référant au champ de gravité.

Afin d'illustrer concrètement l'impact de la déviation de la verticale sur certains ouvrages, on considère le cas d'une tour existante située à Montreux, d'une hauteur d'environ 85 m (voir figure 3). Un tel ouvrage doit naturellement être construit selon la ligne d'aplomb, c'est-à-dire suivant la direction réelle de la gravité (verticale physique). Naïvement, une approche purement géométrique consisterait à implanter une même coordonnée planimétrique au pied et au sommet de la tour. Toutefois, dans la région considérée, la déviation de la verticale atteint un ordre de grandeur d'environ 20 secondes d'arc. Cette déviation induit un décalage horizontal d'environ 1 cm entre la base et le sommet de l'ouvrage. En l'absence de correction de cet effet lors des opérations de mesure et d'implantation, des contraintes non négligeables peuvent apparaître dans la structure, affectant potentiellement son comportement mécanique.

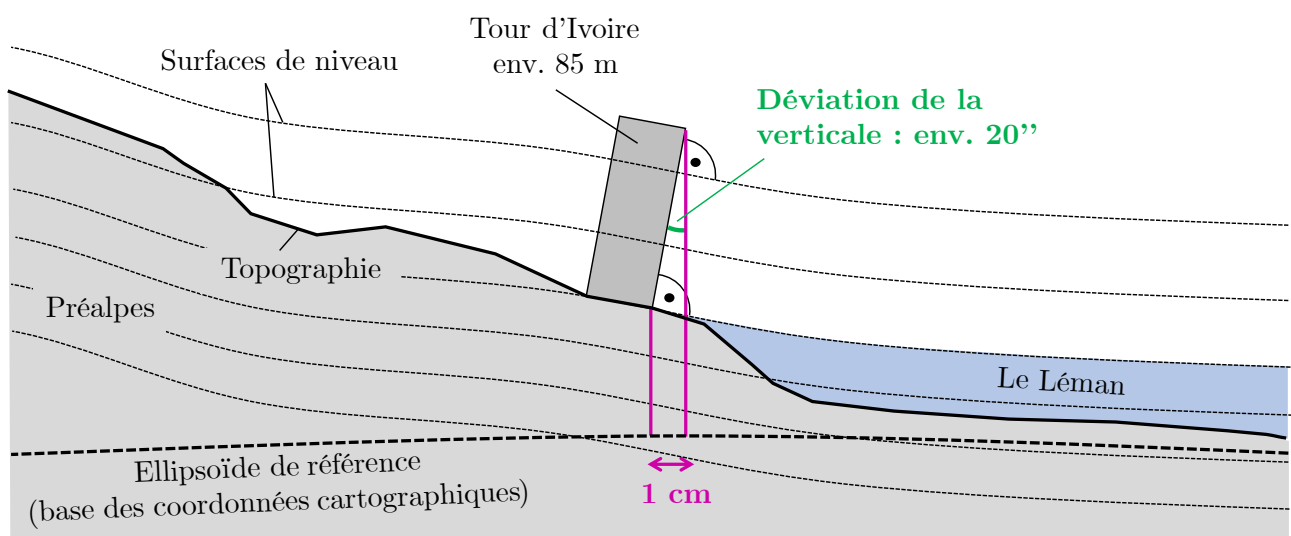


FIGURE 3 – Exemple d'illustration de l'impact de la déviation de la verticale sur la Tour d'Ivoire (Montreux, CH)

Un second exemple permet d'illustrer la différence fondamentale entre une altitude purement géométrique et une altitude liée au champ de gravité. Considérons le cas d'un canal d'irrigation conçu pour fonctionner à très faible pente (voir figure 4). Une approche naïve consisterait à implanter l'ouvrage uniquement à partir des altitudes fournies par le GNSS. Sur le plan géométrique, une différence d'altitude de 10 cm est alors présente entre l'amont et l'aval, ce qui semble suffisant pour assurer l'écoulement de l'eau. Toutefois, l'eau s'écoule naturellement en suivant le champ de gravité et non une référence géométrique abstraite. Il est donc possible que, malgré une pente apparente en termes d'altitudes GNSS, l'eau ne traverse en réalité aucune surface de niveau et que l'écoulement ne s'établisse pas. L'introduction d'un géoïde (par la cote du géoïde) permet de corriger les altitudes géométriques afin d'obtenir des altitudes physiques cohérentes avec le champ de gravité. Dans ce cas, la différence de niveau effective est bien de 10 cm, garantissant un écoulement gravitaire correct. Un tel cas de figure est tout à fait réaliste dans certaines régions de Suisse, par exemple dans la région de Bulle, pour des tracés de l'ordre d'un à deux kilomètres seulement.

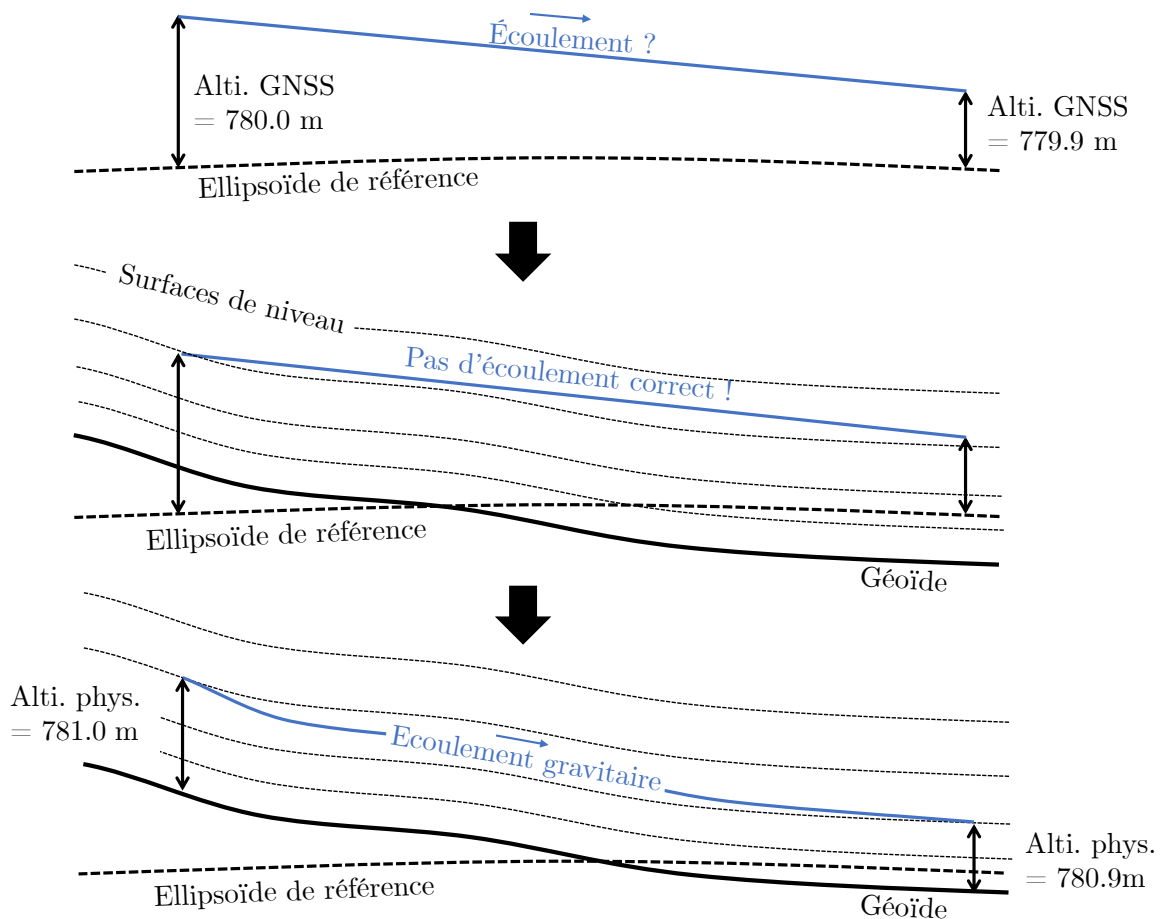


FIGURE 4 – Exemple de la différence entre une altitude géométrique et une altitude reliée au champ de gravité pour un canal d'irrigation

Dans ce contexte, la Suisse³ dispose déjà de modèles régionaux du champ de gravité, tels que le modèle CHGeo2004, dont la précision atteint typiquement quelques centimètres à l'échelle du pays. Toutefois, ces modèles restent limités lorsqu'il s'agit d'applications très locales, sur

3. Office fédéral de topographie, swisstopo

des zones restreintes et complexes, où des exigences de précision nettement plus élevées sont requises. L'objectif de ce travail est donc de développer des méthodes et des outils permettant de déterminer la géométrie du champ de gravité local à partir d'observations et de données maîtrisées par l'utilisateur. Ces développements s'adressent en particulier aux professionnels souhaitant modéliser finement le champ de gravité sur des zones de petite taille, sans dépendre exclusivement de modèles existants. Ils permettent également de disposer d'outils de pré-analyse et de simulation, visant à évaluer et à optimiser une détermination avant la campagne de mesures, aussi bien en termes d'objectifs de qualité que d'organisation. Enfin, les méthodes proposées sont mises en oeuvre et évaluées sur un cas réel, afin d'en valider concrètement les aspects techniques et l'impact pratique.

Contenu du document

Le rapport s'adresse principalement à des lecteurs spécialisés en géodésie physique. Il est organisé de la manière suivante :

- Les deux premiers chapitres posent progressivement le cadre du travail en présentant les logiciels existants, les bases théoriques essentielles et le formalisme utilisé.
- Le chapitre 3 présente la notion de modèle de masse topographique, son utilité ainsi que l'algorithme développé pour en permettre la génération automatique.
- Le chapitre 4 décrit ensuite l'ensemble du processus de détermination des fonctionnelles d'un champ de gravité local, en reliant les bases théoriques, le modèle de masse et les différentes observations considérées.
- Le chapitre 5 est l'un des éléments centraux du Travail de Master. Il traite de l'analyse de la qualité de détermination d'un champ de gravité local à partir d'un ensemble d'intentions d'observations, sans effectuer de mesures sur le terrain. Deux types de simulations en circuit fermé y sont détaillés.
- Le chapitre 6 est consacré à quelques commentaires et considérations sur les scripts informatiques développés en Python.
- Enfin, le chapitre 7 applique l'ensemble des outils et des méthodes au cas réel du barrage de Zeuzier (VS, CH) avec une analyse approfondie.
- Le rapport se termine par des éléments de perspectives et une conclusion.

Chapitre 1

État de l'art

Le développement d'outils pour la détermination de champs de gravité locaux s'inscrit dans un domaine spécialisé de la géodésie. Contrairement aux approches globales, il s'agit ici de travailler sur des zones restreintes, de quelques kilomètres seulement, comme une vallée montagneuse. L'objectif est d'obtenir des fonctionnelles du champ de gravité local, comme la cote du géoïde ou la déviation de la verticale, avec une résolution et une précision adaptées aux besoins pratiques (infrastructures, tunnels, auscultations d'ouvrage, etc.). Cette spécialisation rend le domaine relativement « niche » et peu de logiciels s'adressent directement à cette problématique.

Tout d'abord, l'accès au champ de gravité global ou local repose sur un ensemble de méthodes, principalement :

- le GNSS–nivellement, qui fournit directement des observations de cote du géoïde par la différence entre altitudes ellipsoïdales et altitudes orthométriques ;
- la gravimétrie terrestre, absolue ou relative, qui est souvent acquise sous forme de grilles ou de profils le long des routes et des vallées ;
- la gravimétrie aéroportée ou satellitaire, qui joue un rôle important en couvrant rapidement de larges zones, mais permet de capter uniquement les grandes longueurs d'onde de variation du champ de gravité (ESHAGH et al., 2024) ;
- la mesure de la déviation de la verticale, qui peut être obtenue par des méthodes astro-géodésiques, comme avec la caméra zénithale CODIAC (GUILLAUME, 2015) ou le système récent low-cost PyDaedalus monté sur une station totale (DÉLÈZE, 2024).

Ensuite, le schéma de traitement d'une détermination d'un champ de gravité local est assez standardisé et éprouvé, notamment par la méthode « remove-compute-restore » (GUILLAUME, 2024). On commence par harmoniser les données (systèmes de référence, corrections de marée, dérives instrumentales), puis on applique certaines réductions sur le géoïde. La phase « remove » consiste ensuite à soustraire l'effet des masses modélisées sur les observations. Puis, la phase « compute » consiste à traiter les résidus et les signaux restants. La dernière étape « restore » permet de restaurer les effets du modèle de masses et ainsi prédire les différentes fonctionnelles du champ de gravité à des positions quelconques (grille, topographie, etc.).

Un aspect central et important de cette méthode est le traitement des modèles de masses. Dans la plupart des cas, on suppose une densité constante pour les roches, typiquement autour de $2670 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ (PAGIATAKIS et al., 1999). Dans certains cas (MARTI, 2016), on intègre des densités variables (sédiments, eau, glacier, etc.), ce qui permet d'inclure des effets produits par des masses plus réalistes et d'améliorer la précision des prédictions, mais au prix de données géologiques plus lourdes à obtenir et à qualifier.

Historiquement, des outils comme GRAVSOFIT (FORSBERG et TSCHERNING, 2008) ou, plus récemment, CSHSoft (ABBAK et al., 2024) ont été développés pour la modélisation régionale et locale du champ de gravité. Ils reposent sur les méthodes classiques comme «remove–compute–restore», la formule de Stokes ou ses variantes, et la collocation par moindres carrés. Certains de ces logiciels permettent de combiner différentes sources d'observations (gravimétrie, GNSS–nivellement, déviations de la verticale) avec des modèles globaux pour restituer un champ de gravité cohérent.

Récemment, des environnements logiciels génériques et modulaires ont été développés. C'est notamment le cas de GROOPS (MAYER-GUERR et al., 2021), une suite d'outils open-source conçue pour traiter des données GNSS et de la gravimétrie terrestre ou satellitaire. Bien que GROOPS implémente une approche de type «remove–compute–restore», celle-ci repose essentiellement sur des observations gravimétriques combinées à des modèles globaux du champ de gravité. Cette solution ne prend pas en compte explicitement les observations astro-géodésiques ou le GNSS–nivellement dans les chaînes de traitement proposées.

En parallèle, il existe aussi des logiciels dont le but n'est pas de déterminer directement un géoïde, mais de calculer des champs gravitationnels à partir de modèles de masse. C'est le cas de Tesseroids (UIEDA, 2013), qui utilise des prismes sphériques pour déterminer le potentiel gravitationnel et ses dérivées en coordonnées sphériques, ou de QGravity (GUILLAUME 2015), qui exploite une approche similaire mais en polyèdres homogènes. Ces outils sont davantage orientés vers la prédiction des effets gravitationnels formés par un ensemble de masses que vers la construction d'un modèle direct de géoïde incluant des observations.

Nom	Année	Détermination d'un géoïde	Types d'observations	Open-source
GRAVSOFIT	1970	Oui	Grav., DoV, GPS-niv.	Non
CSHSoft	2010	Oui	Gravimétrie	Oui
Tesseroids	2013	Non	-	Oui
QGravity	2015	Non	-	Non
GROOPS	2016	Oui (régional)	Grav., GNSS sat.	Oui

TABLEAU 1.1 – Récapitulatif de quelques logiciels pour le champ de gravité

En résumé, des solutions logicielles existent pour déterminer certaines fonctionnelles d'un champ

de gravité local ou global. Cependant, la qualification des déterminations locales, notamment en termes de précision ou de pré-analyse par simulation, reste peu abordée de manière intégrée. Ce constat met en évidence la nécessité de développer des outils spécifiquement dédiés à la détermination et surtout à la qualification de champs de gravité locaux de haute précision.

Chapitre 2

Bases théoriques

Ce chapitre présente les fondements théoriques nécessaires à la compréhension des développements abordés dans les chapitres suivants. Il vise également à introduire le formalisme mathématique et physique utilisé.

Le contenu du chapitre s'inspire largement de la thèse « Determination of a Precise Gravity Field for the CLIC Feasibility Studies » (GUILLAUME, 2015) ainsi que du support de cours « Éléments de géodésie » (GUILLAUME, 2024).

2.1 Mécanique newtonienne

La découverte de la loi de la gravitation universelle, énoncée par *Isaac Newton* en 1687, constitue l'un des fondements majeurs de la physique classique. Elle marque l'unification de la description des phénomènes observés sur Terre et au-delà. Newton a mis en évidence que la cause responsable de la chute des corps sur Terre est identique à celle qui gouverne le mouvement des planètes autour du Soleil ou celui de la Lune autour de la Terre. Cette force fondamentale, appelée *gravitation*, agit sur toutes les particules massiques et est engendrée par celles-ci.

2.1.1 Loi de la gravitation universelle

Considérons deux particules ponctuelles \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 , de masses respectives m_1 et m_2 , situées aux positions \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 . La force gravitationnelle exercée sur \mathcal{P}_1 par \mathcal{P}_2 est proportionnelle au produit des masses et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare. Cette relation s'écrit :

$$\mathbf{F}_{12} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^2} \cdot \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|} \quad (2.1)$$

où $G \approx 6.67430 \cdot 10^{-11} [\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}]$ est la constante gravitationnelle universelle. De manière équivalente, la force exercée sur \mathcal{P}_2 par \mathcal{P}_1 est :

$$\mathbf{F}_{21} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2} \cdot \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} \quad (2.2)$$

ce qui implique le principe général :

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad (2.3)$$

Cette loi est universelle et indépendante du référentiel choisi (inertiel ou non inertiel).

2.1.2 Principe de superposition

Une propriété essentielle de la gravitation newtonienne est son caractère superposable. Le champ gravitationnel total exercé sur une particule \mathcal{P}_1 par un ensemble de particules $\{\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \dots, \mathcal{P}_n\}$ est la somme vectorielle des effets individuels :

$$\mathbf{F}_{1S} = \sum_{i=2}^n \mathbf{F}_{1i} = G \cdot m_1 \cdot \sum_{i=2}^n m_i \cdot \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1|^3} \quad (2.4)$$

En faisant tendre le nombre de particules vers l'infini ($n \rightarrow \infty$) et leur masse élémentaire vers zéro ($m_i \rightarrow 0$), on généralise cette relation à un corps continu \mathcal{B} de densité volumique $\rho(\mathbf{x}')$. Le champ gravitationnel résultant sur \mathcal{P}_1 s'écrit alors :

$$\mathbf{F}_{1B} = G \cdot m_1 \cdot \iiint_{\mathcal{B}} \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_1|^3} \cdot \rho(\mathbf{x}') \cdot dV' \quad (2.5)$$

où dV' est l'élément de volume différentiel centré en \mathbf{x}' .

La formulation intégrale 2.5 représente la base de la modélisation gravitationnelle en physique. Elle relie la distribution de densité $\rho(\mathbf{x}')$ à la force exercée en tout point de l'espace. Le champ gravitationnel généré par un corps \mathcal{B} peut ainsi être défini en tout point \mathbf{x} par :

$$\mathbf{F}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}) = G \iiint_{\mathcal{B}} \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \cdot \rho(\mathbf{x}') \cdot dV' \quad (2.6)$$

2.2 Notion de gravité en géodésie physique

En géodésie physique, le vecteur de gravité $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ est défini comme la somme de l'accélération gravitationnelle $\mathbf{g}_{\text{grav}}(\mathbf{x})$ générée par les masses de la Terre \mathfrak{E} , et de l'accélération centrifuge $\mathbf{g}_{\text{cent}}(\mathbf{x})$ due à sa rotation :

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_{\text{grav}}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_{\text{cent}}(\mathbf{x}) \quad (2.7)$$

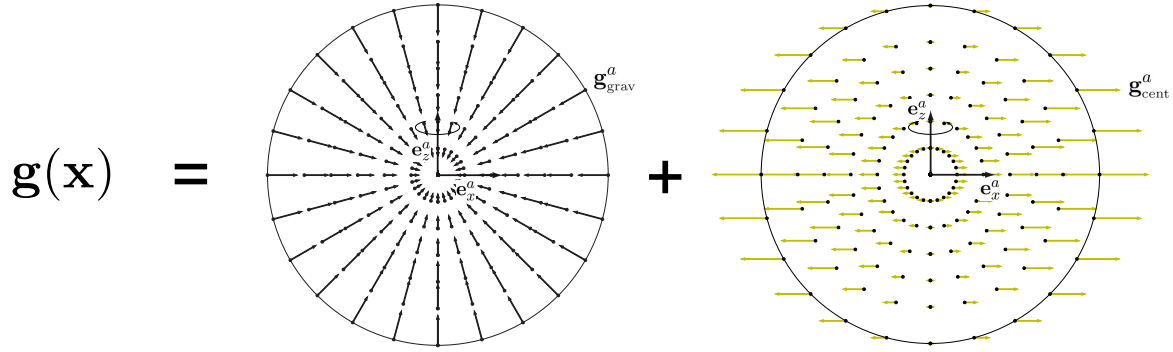


FIGURE 2.1 – Somme de l'accélération gravitationnelle terrestre et de l'accélération centrifuge (schémas modifiés de : GUILLAUME, 2024)

La composante gravitationnelle fait référence à l'équation 2.6 :

$$\mathbf{g}_{\text{grav}}(\mathbf{x}) = G \iiint_{\mathfrak{E}} \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \cdot \rho(\mathbf{x}') \cdot dV' \quad (2.8)$$

La composante centrifuge, liée à la rotation de la Terre d'une vitesse angulaire $\omega_{\mathfrak{E}}$, s'exprime par :

$$\mathbf{g}_{\text{cent}}(\mathbf{x}) = \omega_{\mathfrak{E}}^2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Les termes utilisés sont les suivants :

$\mathbf{g}(\mathbf{x})$	$[\text{m}/\text{s}^2]$: vecteur de gravité en une position \mathbf{x} ,
$\mathbf{g}_{\text{grav}}(\mathbf{x})$	$[\text{m}/\text{s}^2]$: vecteur d'accélération gravitationnelle due aux masses terrestres,
$\mathbf{g}_{\text{cent}}(\mathbf{x})$	$[\text{m}/\text{s}^2]$: vecteur d'accélération centrifuge engendrée par la rotation terrestre,
G	$[\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}]$: constante de gravitation universelle,
$\rho(\mathbf{x}')$	$[\text{kg}/\text{m}^3]$: densité volumique à la position \mathbf{x}' ,
dV'	$[\text{m}^3]$: élément différentiel de volume,
$\omega_{\mathfrak{E}}$	$[\text{rad}/\text{s}]$: vitesse angulaire de rotation de la Terre ($\approx 7.292115 \cdot 10^{-5}$).

L'accélération due aux marées $\mathbf{g}_{\text{marée}}$ est supposée être retirée de toutes les observations et modèles utilisés. Cette simplification se justifie par deux raisons principales : d'une part, les effets de marée peuvent être prédits avec une grande précision à l'aide de modèles, et d'autre part, leurs variations temporelles sont rapides par rapport aux phénomènes gravitationnels et centrifuges, considérés comme stationnaires à notre échelle de temps.

Ainsi, on définit un champ de gravité $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ stationnaire, représentant la contribution combinée du champ gravitationnel terrestre et de la rotation de la Terre.

2.3 Notion de potentiel

2.3.1 Caractère conservatif de la force gravitationnelle

De façon générale, une force est dite *conservative* lorsqu'il existe une fonction scalaire dont le gradient reproduit le champ de force considéré. Cette fonction correspond à l'énergie potentielle associée à la force. On peut donc écrire :

$$\nabla\Phi_{\text{cons}}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_{\text{cons}}(\mathbf{x}) \quad (2.10)$$

ou, en développant :

$$\nabla\Phi_{\text{cons}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_{\text{cons}}}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi_{\text{cons}}}{\partial y} \\ \frac{\partial\Phi_{\text{cons}}}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{\text{cons},x} \\ \mathbf{F}_{\text{cons},y} \\ \mathbf{F}_{\text{cons},z} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Dans ce cas, le travail \mathcal{W} effectué par la force entre deux points A et B le long d'un chemin quelconque \mathcal{S} s'écrit :

$$\mathcal{W}_{A \rightarrow B} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}_{\text{cons}}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{S}} \nabla\Phi_{\text{cons}}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \quad (2.12)$$

D'après le théorème du gradient pour un champ de force conservatif, cette intégrale ne dépend que des points de départ et d'arrivée :

$$\mathcal{W}_{A \rightarrow B} = \Phi_{\text{cons}}(\mathbf{x}_B) - \Phi_{\text{cons}}(\mathbf{x}_A) \quad (2.13)$$

Appliqué au champ gravitationnel newtonien, ce principe signifie qu'il existe un *potentiel gravitationnel* $\Phi_{\text{grav}}(\mathbf{x})$ tel que :

$$\nabla\Phi_{\text{grav}}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_{\text{grav}}(\mathbf{x}) \quad (2.14)$$

Cela traduit le fait que la force gravitationnelle dérive d'un potentiel scalaire, et donc que son travail ne dépend que des positions initiale et finale. Le travail élémentaire associé à cette force s'écrit :

$$d\mathcal{W} = \mathbf{F}_{\text{grav}}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \nabla\Phi_{\text{grav}}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \quad (2.15)$$

En intégrant entre deux points A et B :

$$\mathcal{W}_{A \rightarrow B} = \int_A^B \mathbf{F}_{\text{grav}}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \Phi_{\text{grav}}(\mathbf{x}_B) - \Phi_{\text{grav}}(\mathbf{x}_A) \quad (2.16)$$

Ainsi, la force gravitationnelle est un champ conservatif dérivant du potentiel Φ_{grav} . En géodésie physique, l'étude du champ de gravité ne s'effectue pas directement à partir des forces, mais à

partir des accélérations (m/s^2) ainsi que du potentiel de gravité par unité de masse (m^2/s^2).

2.3.2 Propriété d'additivité

Une propriété fondamentale des potentiels en mécanique est leur caractère *additif*. Lorsque plusieurs champs conservatifs agissent simultanément sur une position \mathbf{x} , chacun dérivant d'un potentiel scalaire, le champ total résulte simplement de la somme vectorielle des champs individuels. Ainsi, si l'on considère deux champs conservatifs $\mathbf{F}_1(\mathbf{x})$ et $\mathbf{F}_2(\mathbf{x})$, vérifiant respectivement :

$$\nabla\Phi_1(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_1(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \nabla\Phi_2(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_2(\mathbf{x}) \quad (2.17)$$

alors le champ total s'écrit :

$$\mathbf{F}_{\text{tot}}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_2(\mathbf{x}) = \nabla\Phi_1(\mathbf{x}) + \nabla\Phi_2(\mathbf{x}) = \nabla[\Phi_1(\mathbf{x}) + \Phi_2(\mathbf{x})] \quad (2.18)$$

Autrement dit, la somme de deux potentiels engendre un champ dont le gradient correspond à la somme des gradients individuels. Cette propriété se généralise naturellement à un nombre quelconque de contributions, permettant d'exprimer le potentiel total sous la forme :

$$\Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(\mathbf{x}) \quad \nabla\Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \nabla\Phi_i(\mathbf{x}) \quad (2.19)$$

De la même manière, dû à la linéarité de l'opérateur ∇ , les dérivées de ces potentiels conservent cette même propriété additive.

2.3.3 Potentiel gravitationnel terrestre V

Le potentiel gravitationnel terrestre, appelé $V(\mathbf{x})$, est défini tel qu'il puisse satisfaire :

$$\nabla V(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_{\text{grav}}(\mathbf{x}) \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \quad (2.20)$$

ainsi :

$$V(\mathbf{x}) = G \iiint_{\mathfrak{O}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \cdot \rho(\mathbf{x}') \cdot dV' \quad \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] \quad (2.21)$$

Exemple avec une boule homogène semblable à la Terre

Les figures 2.2 et 2.3 illustrent la variation du potentiel gravitationnel $V(\mathbf{x})$ et de l'accélération gravitationnelle $|\mathbf{g}_{\text{grav}}(\mathbf{x})|$ pour une boule homogène de caractéristiques semblables à celles de la Terre. À l'intérieur de la sphère, le potentiel décroît avec la distance au centre, tandis que l'accélération augmente linéairement jusqu'à atteindre sa valeur maximale à la surface ($r = R_B$). Au-delà de cette limite, les deux grandeurs décroissent suivant une loi en $1/r$ et $1/r^2$,

respectivement, conformément au comportement attendu du champ gravitationnel newtonien en dehors des masses.

La figure 2.3 illustre bien l'opérateur de gradient ∇ , en montrant que les vecteurs de gravité $\mathbf{g}_{\text{grav}}(\mathbf{x})$ représentent, en chaque point du champ de potentiel $V(\mathbf{x})$, la direction et l'intensité de la plus grande pente de ce potentiel. Autrement dit, la gravité indique localement la direction de variation maximale du potentiel gravitationnel et son module correspond à la rapidité de cette variation.

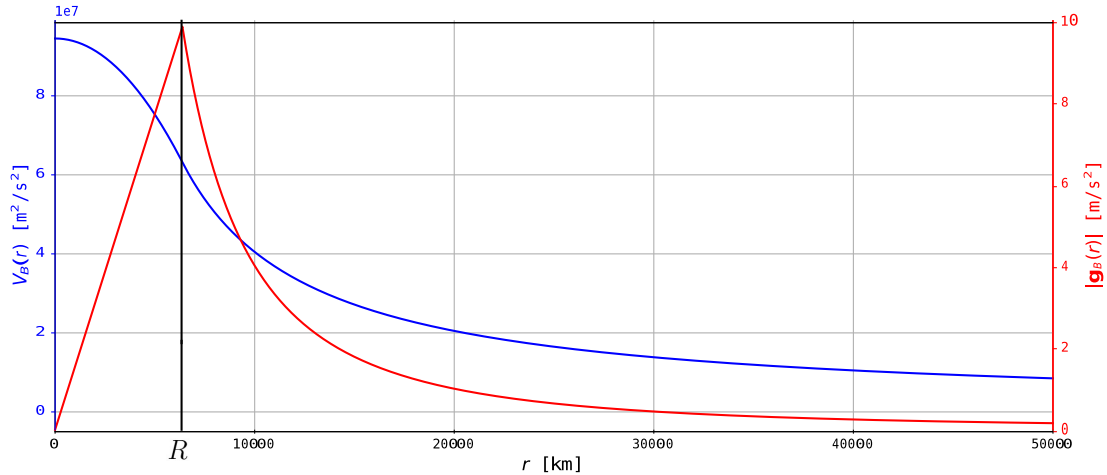


FIGURE 2.2 – Potentiel $V(\mathbf{x})$ et accélération gravitationnelle $|\mathbf{g}_{\text{grav}}(\mathbf{x})|$ d'une boule homogène de rayon $R_B = 6380$ [km], de masse totale $M_B = 5.994 \cdot 10^{24}$ [kg], ou de façon équivalente, de masse volumique $\rho_B = 5.51 \cdot 10^3$ [kg \cdot m $^{-3}$]. Graphique modifié de : GUILLAUME, 2024

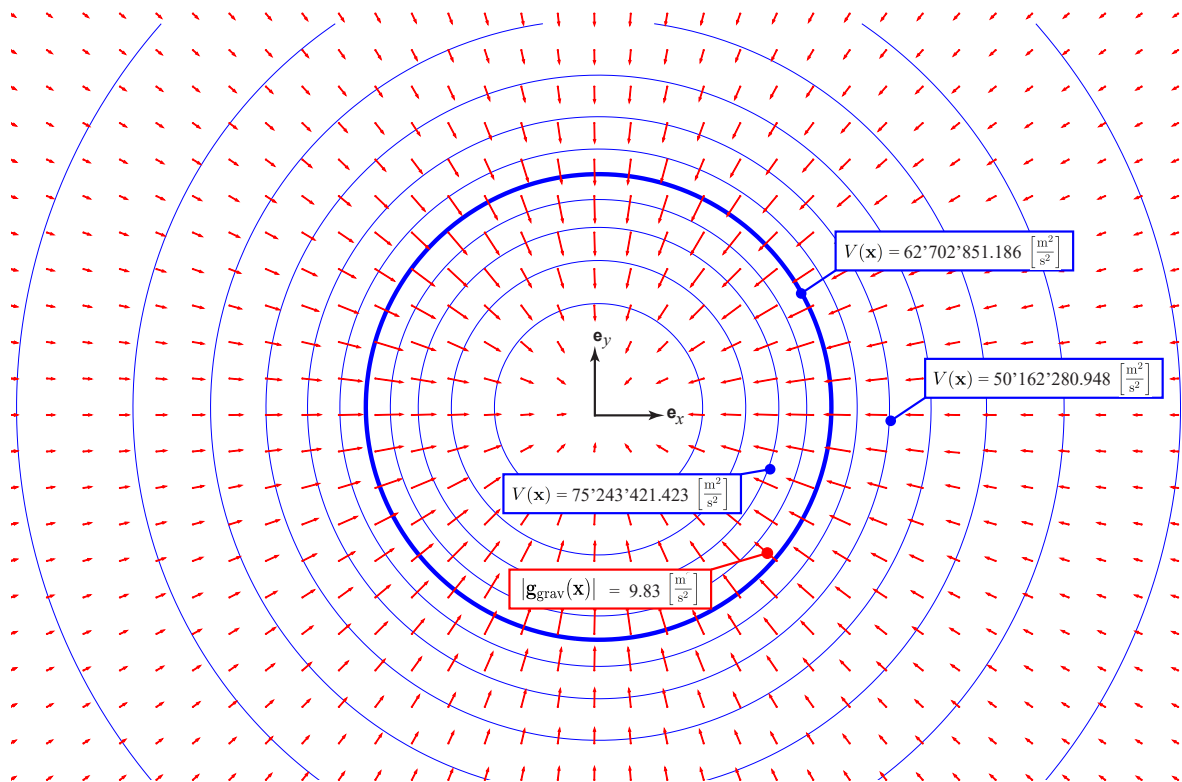


FIGURE 2.3 – Potentiel $V(\mathbf{x})$ et accélération gravitationnelle $|\mathbf{g}_{\text{grav}}(\mathbf{x})|$ d'une boule homogène de rayon $R_B = 6380$ [km], de masse totale $M_B = 5.994 \cdot 10^{24}$ [kg], ou de façon équivalente, de masse volumique $\rho_B = 5.51 \cdot 10^3$ [kg \cdot m $^{-3}$]. Graphique modifié de : GUILLAUME, 2024

2.3.4 Potentiel centrifuge Z

Le potentiel centrifuge, appelé $Z(\mathbf{x})$, est défini tel qu'il puisse satisfaire :

$$\nabla Z(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_{\text{cent}}(\mathbf{x}) \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \quad (2.22)$$

ainsi :

$$Z(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \cdot \omega_{\text{g}}^2 \cdot (x^2 + y^2) \quad \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] \quad (2.23)$$

Exemple avec une boule homogène semblable à la Terre

Par exemple, considérons le potentiel centrifuge des points situés à l'équateur d'une boule homogène de rayon $R_{\text{B}} = 6'380'000$ [m], en rotation avec une vitesse angulaire $\omega_{\text{g}} = 7.292115 \cdot 10^{-5}$ [rad · s⁻¹]. Ce potentiel s'écrit alors :

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \cdot \omega_{\text{g}}^2 \cdot (x^2 + y^2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \omega_{\text{g}}^2 \cdot R_{\text{B}}^2 \\ &= 108'222.703 \quad \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

Tandis que pour un point situé au pôle d'une même boule en rotation, la distance à l'axe de rotation est nulle, soit $(x^2 + y^2) = 0$. Le potentiel centrifuge devient alors :

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \cdot \omega_{\text{g}}^2 \cdot (x^2 + y^2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \omega_{\text{g}}^2 \cdot 0^2 \\ &= 0.000 \quad \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

2.3.5 Potentiel de gravité réel W

Le potentiel total (ou « réel ») $W(\mathbf{x})$ combine les effets du champ gravitationnel terrestre et de la rotation de la Terre. Il est défini de manière à vérifier la relation suivante :

$$\begin{aligned} \nabla W(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{g}_{\text{grav}}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_{\text{cent}}(\mathbf{x}) \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \end{aligned} \quad (2.26)$$

où $W(\mathbf{x})$ s'exprime comme la somme du potentiel gravitationnel et du potentiel centrifuge :

$$W(\mathbf{x}) = G \iiint_{\text{g}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \cdot \rho(\mathbf{x}') \cdot dV' + \frac{1}{2} \cdot \omega_{\text{g}}^2 \cdot (x^2 + y^2) \quad \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] \quad (2.27)$$

Exemple avec une boule homogène semblable à la Terre

Il est à présent possible d'évaluer le potentiel total $W(\mathbf{x})$ en une position sur l'équateur de la Terre fictive exposée aux sections précédentes :

$$\begin{aligned} W(\mathbf{x}) &= V(\mathbf{x}) + Z(\mathbf{x}) \\ &= 62'702'851.186 + 108'222.703 = 62'811'073.889 \quad \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

2.3.6 Potentiel normal U

Le potentiel normal $U(\mathbf{x})$ correspond à une approximation théorique du potentiel de gravité réel $W(\mathbf{x})$. Il est défini comme le potentiel associé à une Terre de référence, caractérisée par une densité ρ , une rotation uniforme autour de son axe et une géométrie simple (comme un ellipsoïde de révolution).

Le potentiel normal satisfait la relation :

$$\nabla U(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}) \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \quad (2.29)$$

où $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x})$ désigne la gravité normale en une position.

2.3.7 Potentiel perturbateur T

À partir des définitions ci-dessus, il est possible d'introduire un nouveau champ de potentiel $T(\mathbf{x})$, appelé potentiel perturbateur. Ce dernier représente la différence entre le potentiel de gravité réel $W(\mathbf{x})$ observable et le potentiel normal $U(\mathbf{x})$:

$$T(\mathbf{x}) = W(\mathbf{x}) - U(\mathbf{x}) \quad (2.30)$$

De manière équivalente, le potentiel de gravité réel peut donc s'exprimer comme la somme du potentiel normal et du potentiel perturbateur :

$$W(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}) + T(\mathbf{x}) \quad (2.31)$$

Le potentiel perturbateur $T(\mathbf{x})$ traduit ainsi l'influence gravitationnelle de toutes les masses terrestres qui ne sont pas prises en compte par le modèle de référence, c'est-à-dire les irrégularités de densité et le relief qui différencient la Terre réelle de l'ellipsoïde normal. La figure 2.4 ci-dessous représente un champ de potentiel perturbateur généré par deux masses.

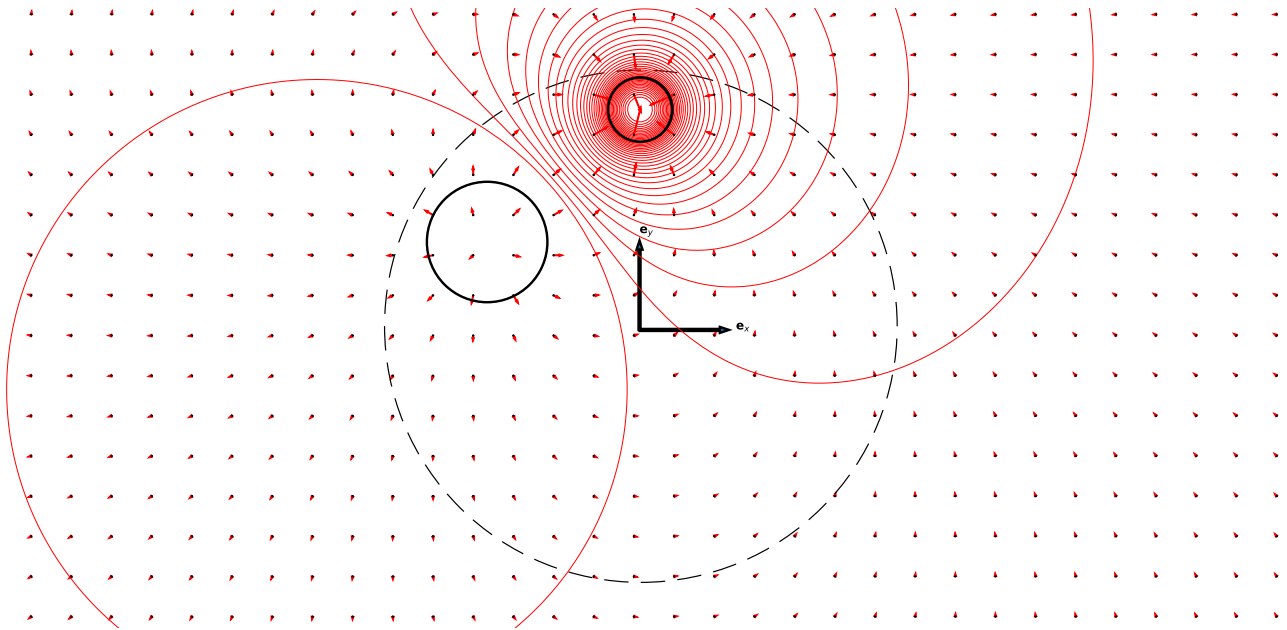


FIGURE 2.4 – Champ de potentiel perturbateur généré par deux masses fictives. Celle du dessus possède une densité fortement supérieure à la densité terrestre et la seconde, au dessous, présente une densité inférieure. Source du schéma : GUILLAUME, 2024

2.4 Détermination de champs gravitationnels

Cette section présente les formulations et développements mathématiques employés pour le calcul des effets gravitationnels produits par un modèle de masse. Dans le cadre de ce travail, deux représentations distinctes sont considérées :

- un ensemble de masses ponctuelles, qui permet, par exemple, de modéliser facilement des contrastes de densité dans le sous-sol ;
- un polyèdre homogène, qui fournit une représentation géométrique de base de la topographie ou d'un lac, par exemple.

2.4.1 Ensemble de masses ponctuelles

On considère un ensemble de masses ponctuelles (points massiques) $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n$ de masses m_i localisées chacune en \mathbf{x}_i . En reprenant les concepts de base de la mécanique newtonnienne (voir section 2.1), le potentiel gravitationnel $V(\mathbf{x})$ en un point \mathbf{x} s'écrit comme la somme des contributions individuelles :

$$V(\mathbf{x}) = G \cdot \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|} \quad (2.32)$$

L'accélération gravitationnelle associée est définie comme le gradient du potentiel :

$$\mathbf{g}_{\text{grav}}(\mathbf{x}) = \nabla V(\mathbf{x}) = -G \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3} \quad (2.33)$$

ce qui fournit la direction et l'intensité de l'accélération gravitationnelle exercée en \mathbf{x} par l'ensemble des masses ponctuelles (voir figure 2.5 ci-dessous).

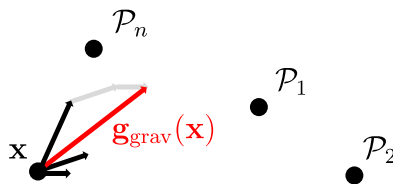


FIGURE 2.5 – Somme des contributions d'accélération gravitationnelle par un ensemble de masses ponctuelles sur une position \mathbf{x} .

2.4.2 Polyèdre homogène

Lorsqu'un corps \mathcal{B} est représenté par un volume continu et homogène délimité par une surface polygonale fermée, son influence gravitationnelle peut être déterminée analytiquement. Ses faces peuvent être constituées de triangles ou, plus généralement, de polygones quelconques. Le polyèdre homogène constitue ainsi un modèle de base idéal pour représenter des entités dont la densité peut être supposée constante (topographie, lacs, bassins sédimentaires, etc.).

Cette approche établit un lien direct entre la géométrie du volume et son potentiel gravitationnel, ainsi que son gradient en tout point \mathbf{x} . Elle évite ainsi la discrétisation en points massiques, laquelle pourrait introduire des incohérences locales liées à leur éventuelle proximité.

Pour les formules ci-dessous, une simplification est faite afin d'alléger la notation : le potentiel et l'accélération gravitationnelle sont donnés pour l'origine du système de coordonnées ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$). En appliquant deux fois le théorème de flux-divergence, les intégrales de volume sont successivement transformées en intégrales de surface, puis en intégrales curvilignes le long des arêtes du polyèdre. Les développements mathématiques complets sont présents dans le cours « Éléments de géodésie », GUILLAUME, 2024.

Formules analytiques finales, sans démonstration ni développement (GUILLAUME, 2024)

La figure 2.6 permet d'identifier certaines variables utilisées dans les formules finales.

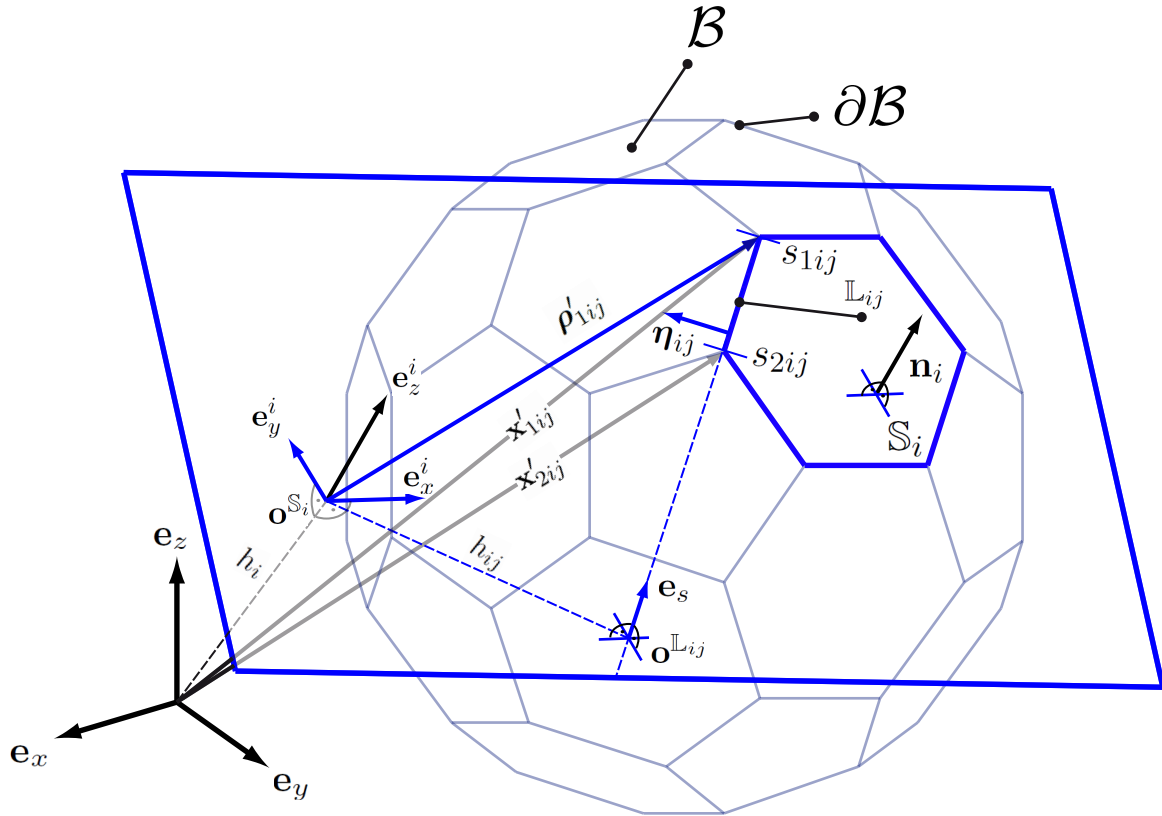


FIGURE 2.6 – Détermination du champ gravitationnel d'un polyèdre homogène par discrétisation des intégrales curvilignes. Source : GUILLAUME, 2024

Les intégrales curvilignes \mathcal{L}_{1ij} et \mathcal{L}_{2ij} peuvent être exprimées analytiquement en fonction des distances signées h_i et h_{ij} selon :

$$\mathcal{L}_{1ij} = \int_{s_{1ij}}^{s_{2ij}} \frac{1}{\sqrt{h_i^2 + h_{ij}^2 + s^2}} \cdot ds, \quad \mathcal{L}_{2ij} = \int_{s_{1ij}}^{s_{2ij}} \frac{1}{(h_i^2 + s^2)\sqrt{h_i^2 + h_{ij}^2 + s^2}} \cdot ds \quad (2.34)$$

Les solutions analytiques correspondantes s'écrivent :

$$\mathcal{L}_{1ij} = \ln\left(\frac{s_{2ij} + l_{2ij}}{s_{1ij} + l_{1ij}}\right) \quad \mathcal{L}_{2ij} = \frac{1}{h_i h_{ij}} \left[\arctan\left(\frac{h_i s_{2ij}}{h_{ij} l_{2ij}}\right) - \arctan\left(\frac{h_i s_{1ij}}{h_{ij} l_{1ij}}\right) \right] \quad (2.35)$$

avec :

$$l_{1ij} = \sqrt{h_i^2 + h_{ij}^2 + s_{1ij}^2} = |\mathbf{x}'_{1ij}|, \quad l_{2ij} = \sqrt{h_i^2 + h_{ij}^2 + s_{2ij}^2} = |\mathbf{x}'_{2ij}| \quad (2.36)$$

En substituant ces expressions, on obtient les formules analytiques finales pour le potentiel et les accélérations gravitationnelles générées par un polyèdre homogène :

$$V(0) = +\frac{G\rho_B}{2} \sum_{i=1}^n h_i \sum_{j=1}^m (h_{ij} \mathcal{L}_{1ij} + h_{ij}^2 \mathcal{L}_{2ij}) \quad (2.37)$$

$$\mathbf{g}_{\text{grav}}(0) = +G\rho_B \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n}_i \sum_{j=1}^m (h_{ij} \mathcal{L}_{1ij} + h_{ij}^2 \mathcal{L}_{2ij}) \\ \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n}_i \sum_{j=1}^m (h_{ij} \mathcal{L}_{1ij} + h_{ij}^2 \mathcal{L}_{2ij}) \\ \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}_i \sum_{j=1}^m (h_{ij} \mathcal{L}_{1ij} + h_{ij}^2 \mathcal{L}_{2ij}) \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

Ces formules sont implémentées dans le logiciel **QGravity**, utilisé dans ce travail pour calculer ce type de champ gravitationnel.

2.5 Géométrie et fonctionnelles du champ de gravité

2.5.1 Equipotentielle

Les surfaces de niveau correspondent aux surfaces présentant le même potentiel de gravité (sans l'influence des marées). Elles représentent les positions d'équilibre que prendraient des masses fluides soumises uniquement au champ de gravité \mathbf{g} , c'est-à-dire là où le potentiel de gravité reste constant :

$$W(\mathbf{x}) = \text{cst} \quad (2.39)$$

Il existe donc une infinité de telles surfaces, chacune associée à une valeur donnée du potentiel.

2.5.2 Géoïde

Parmi l'infinité de surfaces équipotentielles, l'une d'entre elles passe par le niveau moyen des mers et est bien connue des géomaticiens et géodésiens. Il s'agit du *géoïde*. Formellement, le géoïde \mathcal{G} est défini comme étant la surface formée par tous les points $\mathbf{x}_{\mathcal{G}}$ qui possèdent un potentiel de gravité de référence W_0 :

$$W(\mathbf{x}_{\mathcal{G}}) = W_0 \quad (2.40)$$

Aujourd'hui, la valeur W_0 est fixée par convention de l'IERS à :

$$W_0^{\text{IERS}} = 62'636'853.400 \quad \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] \quad (2.41)$$

2.5.3 Cote du géoïde

La cote du géoïde désigne la distance, mesurée le long de la verticale, entre le géoïde \mathcal{G} et une surface de référence choisie, généralement un ellipsoïde \mathcal{E} (p. ex. Bessel en CH1903+), pour une position \mathbf{x} . Cette grandeur, notée $N(\mathbf{x})$, se définit par la relation :

$$N(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) - H^{\text{orth}}(\mathbf{x}) \quad (2.42)$$

avec :

- $h(\mathbf{x})$: altitude ellipsoïdale (géométrique) d'une position \mathbf{x} [m] ;
- $H^{\text{orth}}(\mathbf{x})$: altitude orthométrique d'une position \mathbf{x} [m].

Il convient également d'introduire ici la formule de *Brun* qui relie le potentiel perturbateur T ($= W - U$) à la cote du géoïde en n'importe quel point d'un ellipsoïde de référence \mathcal{E} .

$$N(\mathbf{x}_{\mathcal{E}}) = \frac{T(\mathbf{x}_{\mathcal{E}})}{g(\mathbf{x}_{\mathcal{E}})} \quad (2.43)$$

où $g(\mathbf{x}_\mathcal{E})$ ($= |\mathbf{g}(\mathbf{x}_\mathcal{E})|$) est la gravité sur l'ellipsoïde de référence.

2.5.4 Ligne d'aplomb

La ligne d'aplomb associée à un point \mathbf{x} désigne la trajectoire qui suit, de proche en proche la direction normale à la surface équipotentielle passant par \mathbf{x} . Autrement dit, elle correspond à la direction selon laquelle la variation du potentiel est maximale. Sur le plan mathématique, cela se traduit par le fait que, en tout point \mathbf{x} , la direction de l'aplomb est donnée par le gradient du potentiel de gravité :

$$\nabla W(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (2.44)$$

De manière générale, ces lignes d'aplomb ne sont pas rectilignes mais légèrement courbées. Cela signifie que pour un point situé sur la topographie, la direction de la verticale au niveau du géoïde diffère de celle observable à la surface.

2.5.5 Déviation de la verticale

La déviation de la verticale (abrégée DoV), appelée $\epsilon(\mathbf{x})$ représente l'écart angulaire entre la direction de la verticale physique, définie par la ligne d'aplomb réelle au point considéré \mathbf{x} , et la verticale normale, perpendiculaire à l'ellipsoïde de référence.

Elle se décompose comme suit :

- la composante est-ouest η ;
- la composante nord-sud ξ .

Ces composantes permettent de relier les coordonnées astronomiques (Λ, Φ) , déterminées à partir de la verticale physique, aux coordonnées ellipsoïdales (λ, φ) issues du modèle géométrique d'un ellipsoïde de référence. Ces relations s'écrivent ainsi :

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathbf{x}) &= \lambda(\mathbf{x}) + \frac{\eta(\mathbf{x})}{\cos \phi(\mathbf{x})} \\ \Phi(\mathbf{x}) &= \phi(\mathbf{x}) + \xi(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Les valeurs de (η, ξ) , généralement exprimées en secondes d'arc, sont de l'ordre de quelques unités (-25 à $+25$ arcsec en Suisse).

Tout comme la cote du géoïde, la déviation de la verticale d'une position peut également être reliée au potentiel perturbateur T (sans démonstration) par :

$$\begin{aligned} \eta(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{g(\mathbf{x})} \cdot \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial x^{\text{topo}}} \\ \xi(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{g(\mathbf{x})} \cdot \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial y^{\text{topo}}} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Cette formulation fait intervenir la variation du potentiel T selon les composantes x^{topo} et y^{topo} d'un système topocentrique ellipsoïdal.

Profil topographique

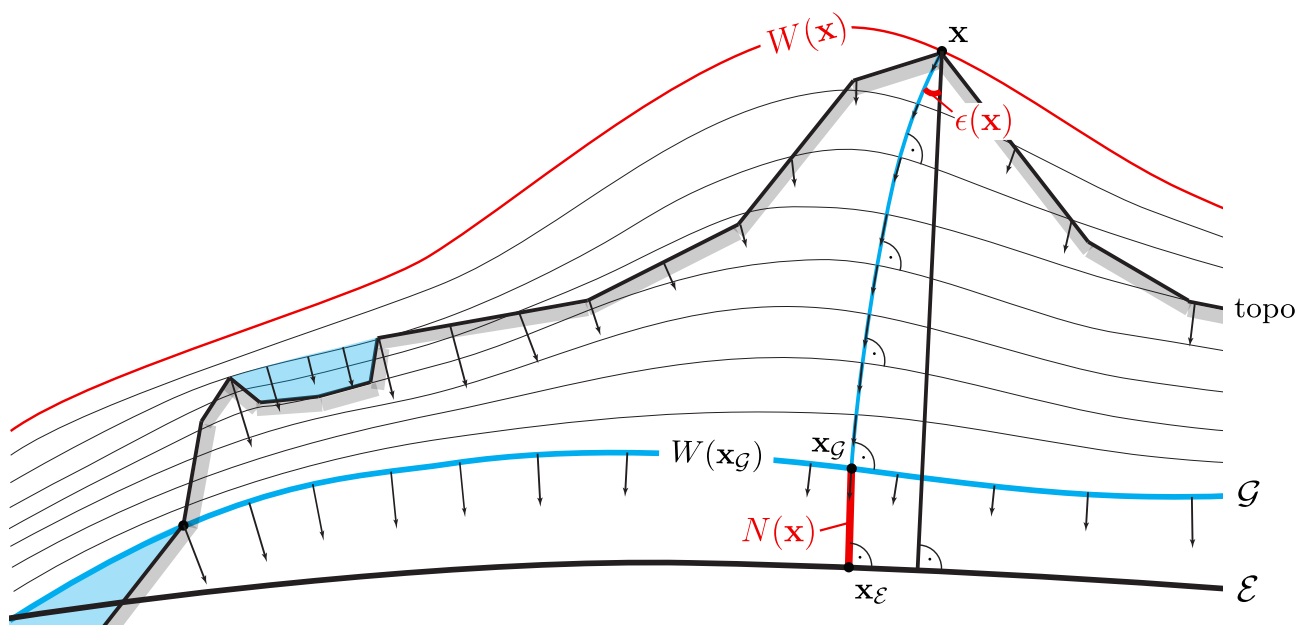


FIGURE 2.7 – Exemple d'un profil topographique mettant en évidence l'équipotentielle $W(\mathbf{x})$, la cote du géoïde $N(\mathbf{x})$ et la déviation de la verticale $\epsilon(\mathbf{x})$ à la position \mathbf{x} . Schéma modifié de : GUILLAUME, 2024

2.6 Observations courantes du champ de gravité

L'observation du champ de gravité terrestre repose sur un ensemble de techniques visant à déterminer, de manière directe ou indirecte, des fonctionnelles de ce dernier. Ces observations permettent, entre autres, de caractériser l'intensité du vecteur $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ et son orientation à proximité de la surface terrestre ou en tout point stable accessible (p. ex. galerie). En d'autres termes, il est question d'accéder aux variations du potentiel réel $W(\mathbf{x})$.

Moyennant certains pré-traitements, ces types d'observations sont utilisées dans le cadre de la détermination des fonctionnelles du champ de gravité.

Dans ce qui suit, seules les techniques de gravimétrie et d'astrogéodésie sont décrites en détail, bien qu'il existe d'autres méthodes pour accéder au champ de gravité, notamment la gradiométrie, ou encore les approches basées sur le décalage entre deux horloges atomiques.

2.6.1 Gravimétrie

La gravimétrie regroupe l'ensemble des méthodes permettant de mesurer l'intensité de la gravité $g(\mathbf{x}) = |\mathbf{g}(\mathbf{x})|$. On distingue deux approches principales : la gravimétrie absolue et la gravimétrie relative.

Gravimétrie absolue

Elle consiste à déterminer directement la valeur de g à partir de l'accélération d'un objet en chute libre dans le vide, chronométrée par interférométrie laser. Les gravimètres absolus (voir figure 2.8) atteignent des précisions de l'ordre de 1 à 5 μgal , ce qui permet de définir les points de référence des réseaux nationaux de gravimétrie. Ces instruments mesurent la gravité en m/s^2 , ou plus couramment en milligal ($1 \text{ mgal} = 10^{-5} \text{ m/s}^2$).



FIGURE 2.8 – Gravimètre absolu A10 Micro-g LaCoste (Scintrex). Source de l'image : (« A10 Outdoor Absolute Gravimeter », 2017)

Gravimétrie relative

Cette méthode repose sur la comparaison de la gravité entre plusieurs points à l'aide d'un gravimètre à ressort ou à quartz (voir figure 2.9). L'instrument enregistre des différences Δg qui sont ensuite rapportées à une ou plusieurs stations absolues par un calcul de réseau. La précision typique des mesures relatives se situe entre 5 et 10 μgal , suffisante pour la densification des réseaux gravimétriques et les applications géophysiques ou géodésiques.

Ces instruments relatifs sont très sensibles aux variations instrumentales et aux effets de dérives temporelles (50 à 200 $\mu\text{gal}/\text{j}$), ce qui nécessite des compensations et calibrations rigoureuses. Cependant, l'utilisation et le transport de ces gravimètres sont bien plus aisés que pour les gravimètres absolus.



FIGURE 2.9 – Gravimètre relatif Scintrex CG-6 en pleine campagne de mesures à Zeuzier (VS)

2.6.2 Astro-géodésie

L'astro-géodésie consiste à déterminer la position d'un point à la surface terrestre à partir d'observations astronomiques, c'est-à-dire à partir de la direction apparente d'étoiles. Cette méthode permet d'obtenir les coordonnées astronomiques d'un point, à savoir la latitude astronomique Φ et la longitude astronomique Λ , définies par rapport à la direction physique de la gravité.

En appliquant les relations de l'équation 2.45, il est possible d'obtenir les déviations de la verticale (η, ξ) par rapport à un système de référence (p. ex. ITRS ou CH1903+).

Historiquement, ces mesures étaient réalisées à l'aide de théodolites et de caméra zénithales analogiques. Aujourd'hui, il existe deux catégories principales d'instruments astro-géodésiques :

- Caméra zénithale (p. ex. CODIAC, voir figure 2.10), précision d'environ 0.05 arcsec ;
- Système à monter sur une station totale robotisée (p. ex. PyDaedalus, voir figure 2.11), précision de l'ordre de 0.2 à 0.4 arcsec.

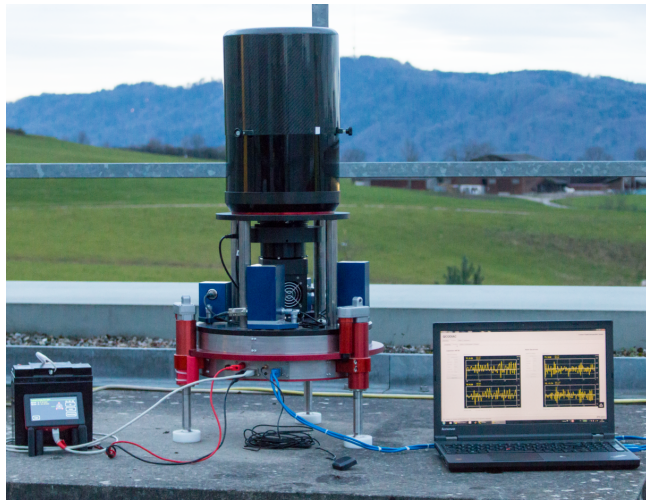


FIGURE 2.10 – Caméra zénithale CODIAC, ETH Zürich (GUILLAUME, 2015)



FIGURE 2.11 – Système PyDaedalus monté sur une station totale Leica TS60

Chapitre 3

Modèle de masse de la topographie

Dans toute détermination du champ de gravité, l'emploi d'un modèle de masse, noté \mathcal{M} , est indispensable. Ce modèle permet de réduire, puis de restaurer les effets produits par les masses modélisées sur les observations et sur les fonctionnelles à estimer.

Selon l'étendue géographique et la précision souhaitée, le modèle de masse peut être constitué d'un ou de plusieurs sous-modèles. À titre d'exemple, le tableau 3.1 présente les principaux composants et les densités associées utilisées dans le modèle de masse du géoïde CHGeo2004 (MARTI, 2016).

Modèle	Masse volumique ρ [kg/m ³]
Topographie générale ($\mathcal{M}_{\text{topo}}$)	2'670
Eau des lacs	1'000
Glace des glaciers	900
Sédiments issus de l'ère quaternaire	2'000
Sédiments de la plaine du Po	1'900
Corps d'Ivrea	3'100

TABLEAU 3.1 – Densités utilisées pour le géoïde CHGeo2004

Dans le cadre du présent travail, les emprises locales considérées sont bien plus restreintes et sont de l'ordre de quelques kilomètres seulement, à l'échelle d'une vallée montagneuse. Ainsi, la disponibilité de modèles numériques de terrain décrivant la surface topographique avec une résolution suffisante permet d'envisager une génération automatisée d'un modèle de masse de base $\mathcal{M}_{\text{topo}}$. De plus, les lacs sont excavés à l'aide de jeux de données complémentaires, afin de retrancher le volume d'eau et de faire correspondre le modèle $\mathcal{M}_{\text{topo}}$ au plus proche de la géométrie de la roche.

Un tel modèle peut ensuite être affiné ou complété manuellement par un logiciel de modélisation 3D selon les besoins spécifiques du site, par exemple en remplissant certains bassins jusqu'à un niveau d'eau défini, comme dans le cas d'un lac artificiel de barrage. Dans certains cas, l'ajout de données géologiques peut être réalisé manuellement, en dehors du modèle de base de

la topographie (glaciers, sédiments, etc.).

Le présent chapitre vise à décrire plusieurs processus et algorithmes de géométrie computationnelle permettant la génération automatique d'un modèle de base de la topographie $\mathcal{M}_{\text{topo}}$.

3.1 Processus général

La figure 3.1 illustre le processus de génération automatique d'un modèle de base de la topographie, dont les volumes des lacs sont excavés. Il convient de souligner que les modèles numériques de terrain (MNT) représentent généralement la surface des lacs plutôt que leur fond, ce qui justifie l'application d'un traitement supplémentaire d'excavation afin d'obtenir une modélisation réaliste des masses rocheuses.

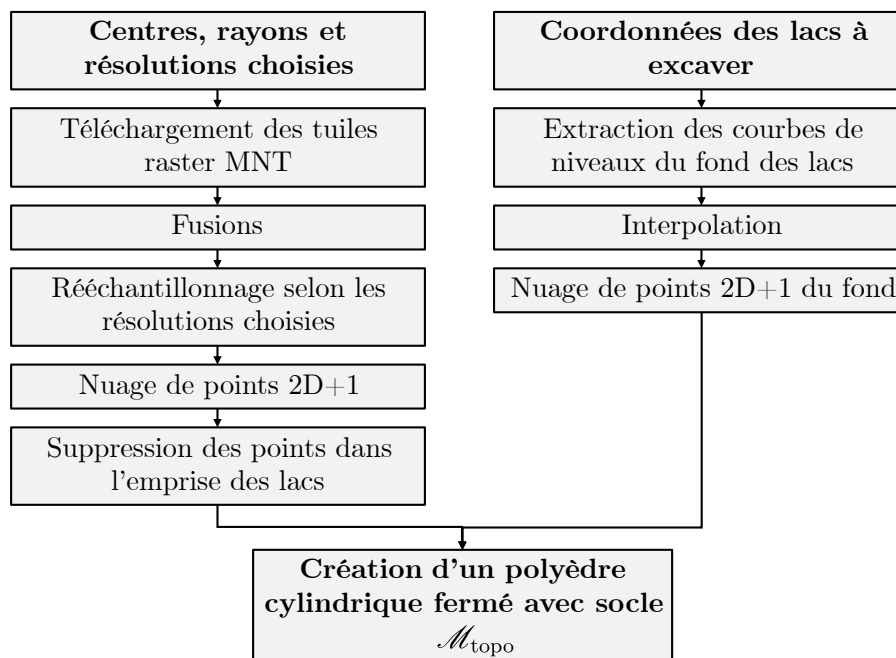


FIGURE 3.1 – Processus général de la création d'un modèle de masse de base de la topographie

3.2 Paramètres d'entrée

Les paramètres nécessaires à ce processus sont présentés dans le tableau 3.2 :

Description	Valeur-exemple
Projection (EPSG)	2056 (MN95), 5832 (UTM 32N)
Centre du modèle	2'599'839, 1'132'848
Rayon le plus large (coarse)	70'000 m
Résolution la plus large (coarse)	1'500 m/px
Modèle fin 1 (centre, rayon, rés.)	2'599'825, 1'132'875, 5'000 m, 50 m/px
Modèle fin 2 (centre, rayon, rés.)	2'599'825, 1'132'875, 10'000 m, 200 m/px
...	...
Lacs à excaver	(2'599'463, 1'133'298), ...

TABLEAU 3.2 – Exemples de paramètres d'entrée

Les figures 3.2 et 3.3 représentent les exemples d'entrées du tableau 3.2 sur une carte.

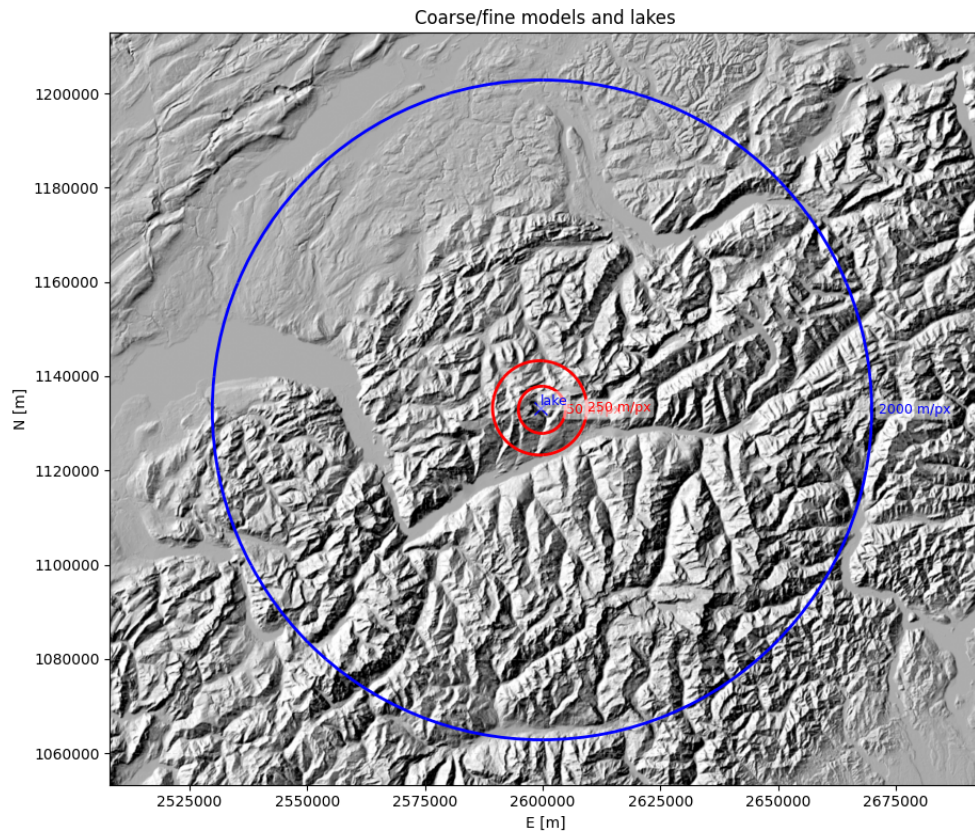


FIGURE 3.2 – Vue élargie des entrées du script (ici, pour le lac de Zeuzier en Valais). En bleu, le rayon le plus large.

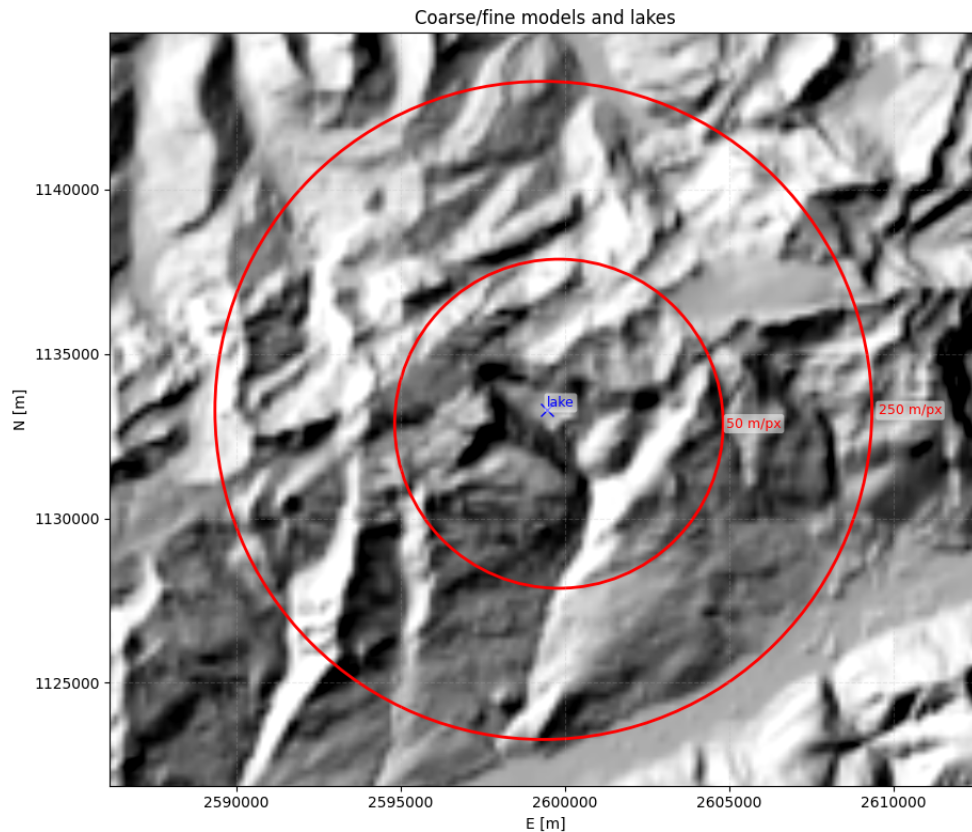


FIGURE 3.3 – Vue zoomée des entrées du script. En rouge, les zones multi-résolutions. La croix bleue désigne un point du lac que l’on souhaite excaver.

3.3 Choix des résolutions

Le choix des rayons et des résolutions constitue un aspect essentiel dans la détermination d’un champ de gravité local. Il s’agit de trouver un compromis entre plusieurs considérations :

- **Temps de traitement** : un modèle trop fin entraîne un nombre de polygones important et des temps de calcul très élevés. Afin de pallier ce problème, il est courant que les mailles situées au-delà d’une cinquantaine de kilomètres atteignent plusieurs kilomètres de côté. Les masses lointaines mal modélisées contribuent de manière identique sur l’emprise du champ local et apparaissent ainsi comme des masses non-modélisées détectables dans les observations sur le co-géoïde.
- **Représentation fidèle des masses proches** : à l’inverse, un maillage trop grossier à proximité des points d’observation engendre des biais sur les effets gravitationnels. Ce problème est particulièrement critique en gravimétrie qui est très sensible aux variations de masse dans l’environnement immédiat des positions de mesure.

À titre d’exemple, le géoïde CHGeo2004 repose sur un modèle de masse dont la maille est d’environ 500 m pour l’ensemble du territoire suisse et les zones frontalières. Dans les secteurs proches des points d’observation, la résolution a toutefois été affinée entre 25 m (\rightarrow 100 m) et

50 m (\rightarrow 1'250 m) afin d'assurer une modélisation plus fidèle des effets locaux (MARTI, 2016).

3.4 Modèle numérique de terrain (raster)

Selon les résolutions choisies, plusieurs sources de données MNT raster sont utilisées et téléchargées via API. Le tableau 3.3 en présente les différentes caractéristiques.

Nom	Résolution [m/px]	Fournisseur	Couverture
swissALTI3D	0.5 et 2.0	swisstopo	CH
swissALTIRegio	10.0	swisstopo	CH + \approx 100 km
Copernicus GLO-90 DEM	\approx 90	OpenTopography	Monde entier
Copernicus GLO-30 DEM	\approx 30	OpenTopography	Monde entier

TABLEAU 3.3 – Caractéristiques des géodonnées MNT raster

Selon les rayons et résolutions choisis, il y a tout d'abord lieu de reprojeter toutes les données raster dans le système de projection souhaité (p. ex. EPSG :2056 MN95). Puis, une fois cela réalisé, une fusion des tuiles de même résolution est réalisée à l'aide des bibliothèques *rasterio* et *gdal*, notamment.

3.5 Rééchantillonnage

Afin d'atteindre rigoureusement la résolution choisie qui ne correspond pas forcément à la résolution originale de la source de données (voir tableau 3.3), il est nécessaire de procéder à une opération de rééchantillonnage. Par exemple, il s'agirait de passer d'une résolution de 90 m/px à 500 m/px pour la zone élargie.

Le rééchantillonnage en un point (x_i, y_j) consiste à approximer la valeur de la grille cible $g_{i,j}$ par une combinaison pondérée des valeurs de la grille source $F_{m,n}$, selon un noyau d'interpolation \mathcal{K} défini par la méthode choisie (« nearest » ou « bilinear »). En notant x_m et y_n les centres de pixels du raster source, on peut exprimer mathématiquement cette opération sous la forme :

$$g_{i,j} = \sum_{m,n} F_{m,n} \cdot \mathcal{K} \left(\frac{x_i - x_m}{h} \right) \cdot \mathcal{K} \left(\frac{y_j - y_n}{h} \right), \quad (3.1)$$

où h désigne la taille du pixel en mètres de la grille cible.

Les noyaux d'interpolation usuels s'écrivent :

$$\mathcal{K}_{\text{nearest}}(u) = \mathbf{1}_{|u| < \frac{1}{2}} \quad \mathcal{K}_{\text{bilinear}}(u) = \max(0, 1 - |u|) \quad (3.2)$$

avec u représentant la distance normalisée exprimée en pixels :

$$u = \frac{x_i - x_m}{h} \quad u = \frac{y_i - y_m}{h} \quad (3.3)$$

Par défaut, la méthode bilinéaire est retenue en raison de sa simplicité et de sa vitesse de traitement. Chaque valeur $g_{i,j}$ est ainsi calculée par une interpolation locale tenant compte du voisinage défini par le noyau \mathcal{K} , ce qui revient à une convolution autour du pixel cible. Ce procédé induit un léger lissage, assurant une transition continue entre les pixels adjacents sans « marche d'escalier » trop importante.

3.6 Nuage de points $\mathcal{P}_{\text{topo}}$

Après rééchantillonnage, le passage vers un nuage de points 2D+1 (x, y, z) est direct. Chaque pixel de coordonnées (x_i, y_j) du raster est associé à sa valeur d'altitude $h_{i,j}$:

$$\mathcal{P}_{i,j} = (x_i, y_j, h_{i,j}) \quad (3.4)$$

Ainsi, un nuage de points de la topographie passant par la surface des lacs est formé $\mathcal{P}_{\text{topo}} = \{\mathcal{P}_{1,1}, \mathcal{P}_{1,2}, \dots\}$.

Ensuite, selon les rayons choisis, un recadrage circulaire est simplement appliqué sur le nuage $\mathcal{P}_{\text{topo}}$ de manière à ne conserver que les points situés à l'intérieur d'un disque de centre (c_x, c_y) et de rayon R (voir figure 3.4) :

$$\mathcal{P}_{\text{topo}}^R = \{ \mathcal{P}_{i,j} \in \mathcal{P}_{\text{topo}} \mid (x_i - c_x)^2 + (y_j - c_y)^2 \leq R^2 \} \quad (3.5)$$

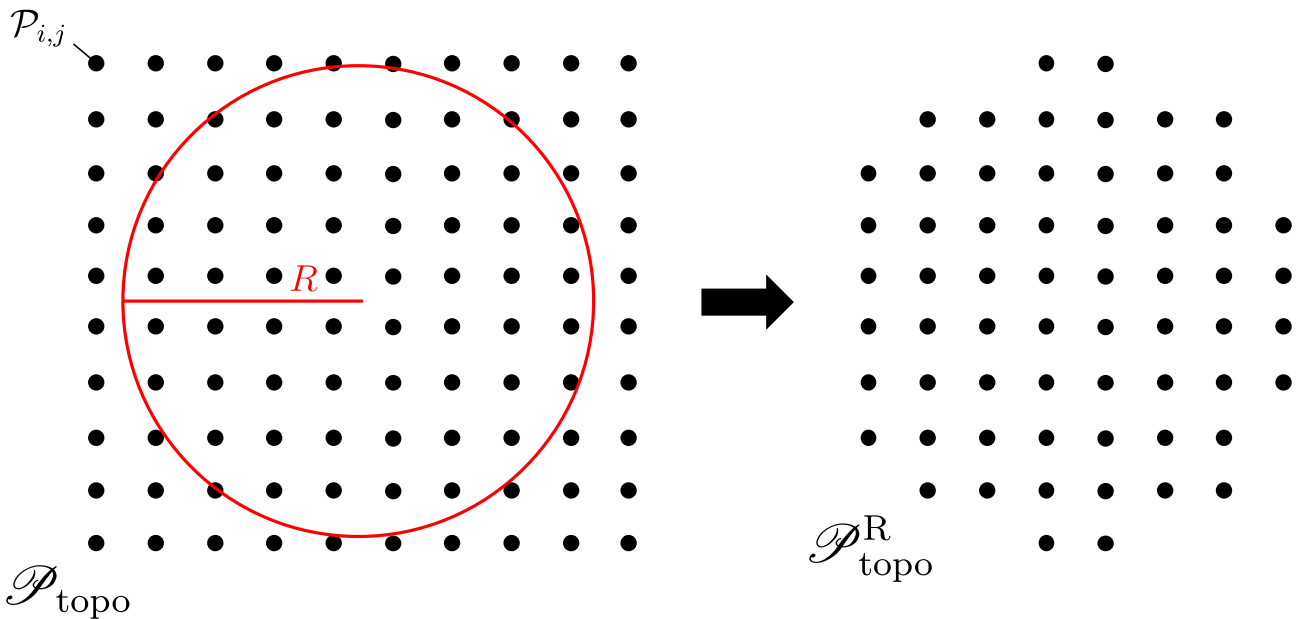


FIGURE 3.4 – Recadrage du nuage de points selon un cercle de rayon R et de centre (c_x, c_y)

3.7 Excavation du volume des lacs

Les modèles numériques de terrain représentent la surface des lacs, et non leur fond. Cette section décrit le procédé d’excavation du volume d’eau des lacs sélectionnés.

3.7.1 Emprise des lacs

Tout d’abord, il est nécessaire d’obtenir les polygones 2D de l’emprise des lacs à excaver. Pour réaliser ceci, les données *swissVECTOR25* (swisstopo) permettent d’obtenir tous les polygones des lacs de Suisse. Ceci inclut notamment les grands lacs comme Le Léman et même certains lacs de montagne, comme celui de Zeuzier. Ces géodonnées contiennent également les courbes de niveaux du fond de ces lacs qui seront utilisées par la suite.

Dans ce but, il est possible de parcourir toutes les polygones 2D fermées des lacs \mathcal{L}_{lac} et de tester chacune d’elles pour déterminer si un lac est à excaver, selon les coordonnées fournies en entrée (voir tableau 3.2). Pour chaque \mathcal{L}_{lac} parcouru, un test d’inclusion est réalisé :

$$(x_{\text{lac}}, y_{\text{lac}}) \in \mathcal{L}_{\text{lac}} \quad (3.6)$$

Si cette condition est vérifiée, le lac correspondant est alors sélectionné pour l’excavation (voir figure 3.5). Les polygones des lacs retenus sont ensuite stockés dans un ensemble $\{\mathcal{L}_{\text{lac}_1}, \mathcal{L}_{\text{lac}_2}, \dots\}$ qui sera utilisé lors du filtrage des points de la topographie dans la section suivante.

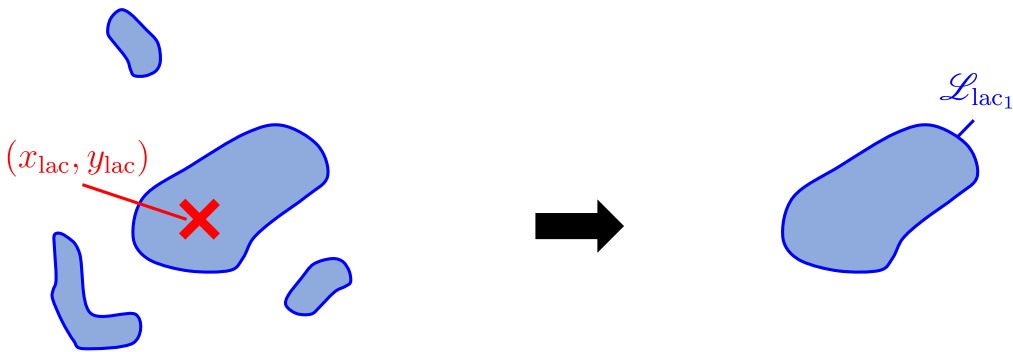


FIGURE 3.5 – Sélection des polygones des lacs à excaver

La librairie `matplotlib.path` a été utilisée pour ce test d’inclusion. Elle contient, entre autres, un algorithme de géométrie computationnelle qui est appelé « point in-out polygon » et est optimisé dans le langage compilé C avec une interface Python.

3.7.2 Filtrage du nuage de points $\mathcal{P}_{\text{topo}}^{\text{R}}$

Afin de pouvoir excaver les volumes des lacs de la topographie, il est tout d’abord nécessaire de retirer les points du nuage $\mathcal{P}_{\text{topo}}^{\text{R}}$ situés à l’intérieur d’une polygone 2D fermée \mathcal{L}_{lac} (voir

figure 3.6).

$$\mathcal{P}_{\text{topo-lac}}^{\text{R}} = \{ \mathcal{P}_{i,j} \in \mathcal{P}_{\text{topo}}^{\text{R}} \mid (x_i, y_j) \notin \mathcal{L}_{\text{lac}} \} \quad (3.7)$$

L'algorithme « point in-out polygon » de la section précédente est également utilisé pour cette partie.

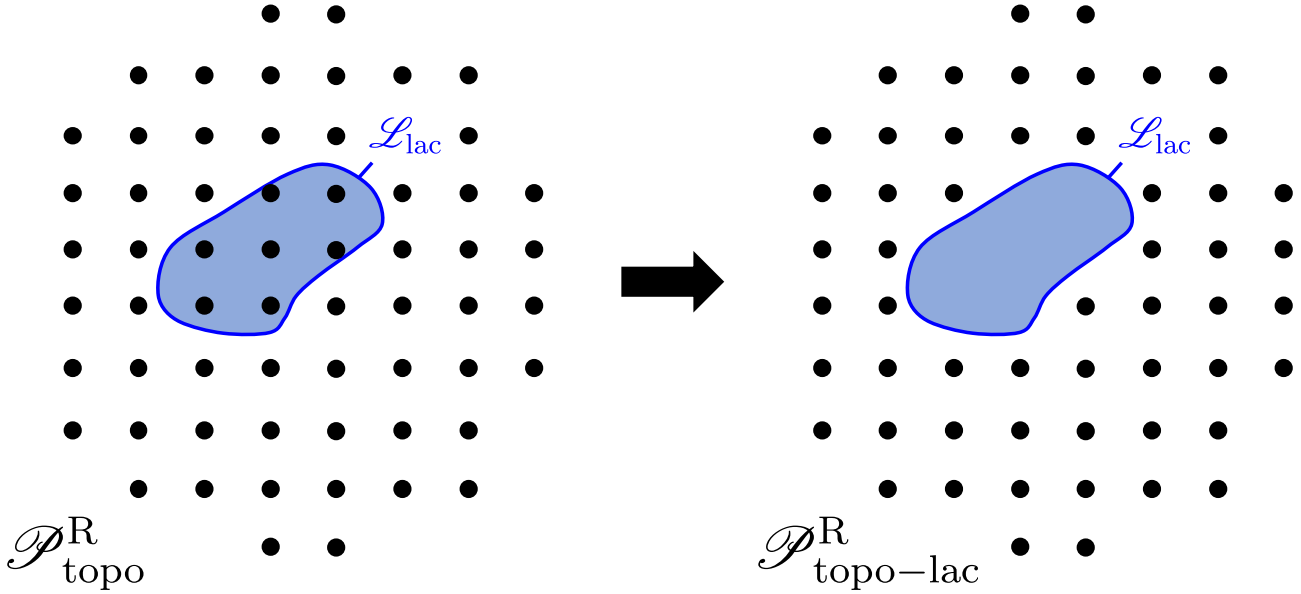


FIGURE 3.6 – Filtrage des points à l'intérieur d'une polygône \mathcal{L}_{lac}

3.7.3 Génération du nuage de points du fond des lacs \mathcal{P}_{lac}

Il convient ensuite de générer le nuage de points du fond des lacs à partir des courbes de niveaux de swissVECTOR3D (swisstopo). Dans ce but, il est nécessaire de procéder à une interpolation des courbes de niveaux selon une grille régulière. La figure 3.7 peut aider à l'identification des différentes variables.

Tout d'abord, on définit la grille de pas h dans l'enveloppe de \mathcal{L}_{lac} :

$$x_i = x_{\min} + i \cdot h \quad y_j = y_{\min} + j \cdot h \quad (3.8)$$

et l'ensemble des points 2D retenus (à l'intérieur) :

$$\mathcal{G}_{\text{in}} = \{ (x_i, y_j) \mid (x_i, y_j) \in \mathcal{L}_{\text{lac}} \} \quad (3.9)$$

Les courbes de niveau 3D fournissent un nuage de M points échantillonnés :

$$\{ (X_\ell, Y_\ell, Z_\ell) \}_{\ell=1}^M \quad (3.10)$$

Pour tout nœud $(x, y) \in \mathcal{G}_{\text{in}}$, on cherche ses k plus proches voisins pour lesquels chaque distance est calculée simplement :

$$d_\ell = \sqrt{(x, y)^2 - (X_\ell, Y_\ell)^2} \quad (3.11)$$

Puis, on interpole chaque point de la grille en utilisant l'IDW (« Inverse Distance Weighed », puissance $p = 2$ par défaut) :

$$Z(x, y) = \frac{\sum_{r=1}^k w_r \cdot Z_{\ell_r}}{\sum_{r=1}^k w_r} \quad \text{avec :} \quad w_r = d_{\ell}^{-p} \quad (3.12)$$

Le résultat est un nuage de points 2D+1 régulier strictement à l'intérieur du lac \mathcal{L}_{lac} :

$$\mathcal{P}_{\text{lac}} = \{ (x, y, Z(x, y)) \mid (x, y) \in \mathcal{G}_{\text{in}} \} \quad (3.13)$$

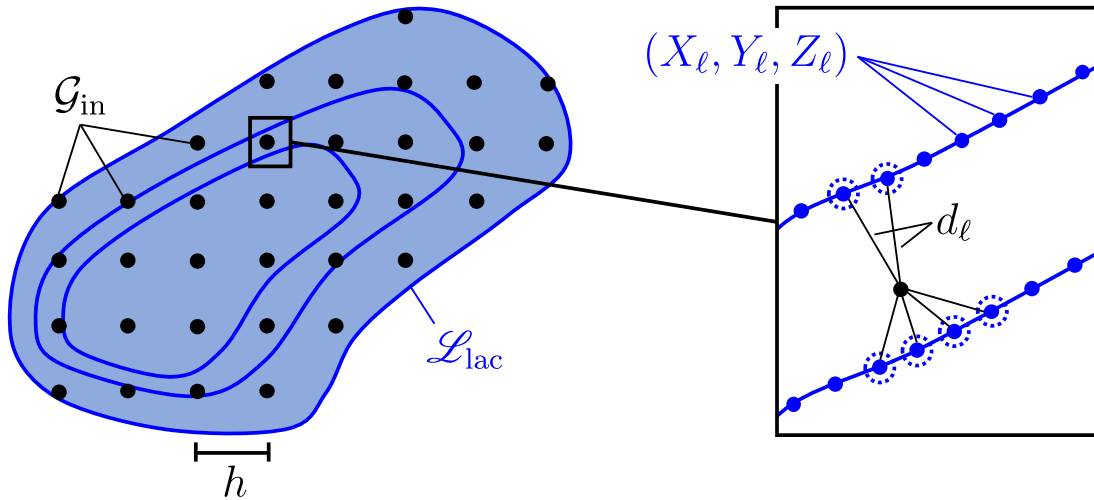


FIGURE 3.7 – Interpolation d'un nuage de points au fond d'un lac à partir de courbes de niveaux

3.7.4 Nuage de points final $\mathcal{P}_{\text{topo+lac}}^{\text{R}}$

Le nuage de points final de la topographie excavée du fond d'un lac est simplement donné par l'union suivante :

$$\mathcal{P}_{\text{topo+lac}}^{\text{R}} = \mathcal{P}_{\text{topo-lac}}^{\text{R}} \cup \mathcal{P}_{\text{lac}} \quad (3.14)$$

Le profil de la figure 3.8 ci-dessous résume les différentes étapes d'excavation des lacs.

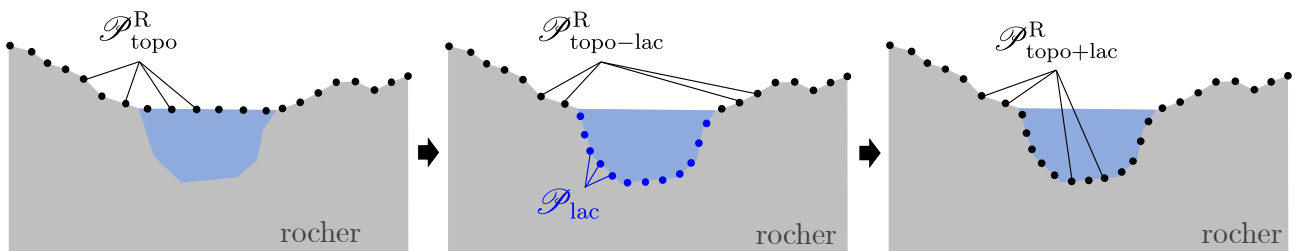


FIGURE 3.8 – Résumé du processus d'excavation des lacs

3.8 Polyèdre fermé

L'objectif est de générer un polyèdre tridimensionnel étanche à partir du nuage de points final $\mathcal{P}_{\text{topo+lac}}^{\text{R}}$ composé de points $\mathbf{p}_i = (X_i, Y_i, Z_i)$ décrivant la topographie excavée des volumes des lacs. La démarche s'appuie sur trois éléments géométriques fondamentaux : la surface supérieure, les murs latéraux et la surface inférieure. L'ensemble forme un polyèdre fermé avec des faces triangulaires orientées vers l'extérieur et sans auto-intersection.

Cet algorithme fonctionne de manière générique. Ainsi, si le nuage de points de la surface est de forme circulaire, alors le socle l'est également, comme toute autre forme polygonale.

3.8.1 Surface supérieure

À partir des positions horizontales (X_i, Y_i) , on construit une triangulation de Delaunay \mathcal{T}_{top} (voir figure 3.9) :

$$\mathcal{T} = \text{Delaunay}(\mathcal{P}_{\text{topo+lac}}^{\text{R}}) \quad (3.15)$$

En pratique, cette opération peut être réalisée simplement à l'aide de la librairie `scipy.spatial`. Chaque face est orientée dans le sens antihoraire dans le plan afin que sa normale \mathbf{n} satisfasse :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z > 0 \quad (3.16)$$

et, par conséquent, pointe vers le « haut ».

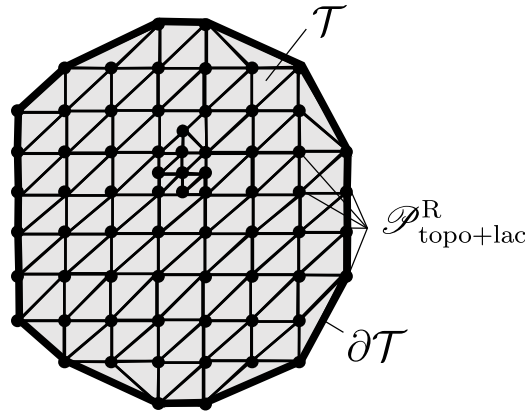


FIGURE 3.9 – Triangulation de Delaunay du nuage de points $\mathcal{P}_{\text{topo+lac}}^{\text{R}}$ multi-résolution

3.8.2 Détection du bord et construction du contour inférieur

Les arêtes appartenant à une seule face de \mathcal{T} définissent un contour fermé :

$$\partial\mathcal{T} = \{\mathbf{p}_{\partial\mathcal{T}}^i\} \quad (3.17)$$

On projette ensuite ce contour sur le plan inférieur (p. ex. $z_{\text{base}} = 0.000$), ce qui donne, pour chacun des points :

$$\mathbf{p}_{\partial Q}^i = (X(\mathbf{p}_{\partial T}^i), Y(\mathbf{p}_{\partial T}^i), z_{\text{base}}) \quad (3.18)$$

qui forment le contour inférieur ∂Q , utilisé à la fois pour les murs et la surface inférieure (voir figures 3.10 et 3.11).

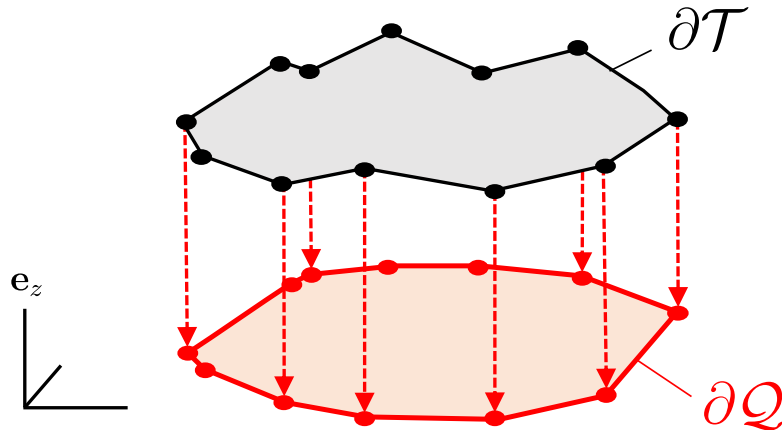


FIGURE 3.10 – Création du contour inférieur ∂Q

3.8.3 Murs latéraux

Pour chaque segment consécutif $(\mathbf{p}_{\partial T}^i, \mathbf{p}_{\partial T}^{i+1})$ de ∂T , on construit un quadrilatère vertical fermé :

$$\mathbf{p}_{\partial T}^i, \mathbf{p}_{\partial T}^{i+1}, \mathbf{p}_{\partial Q}^{i+1}, \mathbf{p}_{\partial Q}^i \quad (3.19)$$

puis on le décompose en deux triangles dont les orientations sont ajustées pour que les normales pointent vers l'extérieur.

L'ensemble de ces triangles forme la triangulation des murs latéraux, appelée \mathcal{S} (voir figure 3.11).

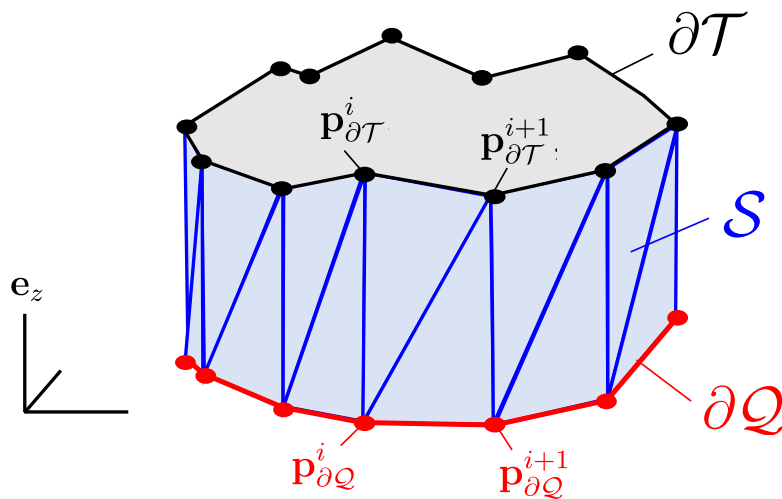


FIGURE 3.11 – Formation des triangles des murs latéraux

3.8.4 Surface inférieure

Génération d'une grille régulière

Tout d'abord, on crée une grille régulière à l'intérieur de l'enveloppe 2D du contour inférieur $\partial\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{P}_{\text{grid}} = \{ (x_i, y_j) \mid (x_i, y_j) \in \mathcal{Q} \} \quad \text{avec : } x_i = x_{\min} + i \cdot h_{\mathcal{Q}}, y_j = y_{\min} + j \cdot h_{\mathcal{Q}} \quad (3.20)$$

où $h_{\mathcal{Q}}$ désigne ici la taille de maille choisie pour le socle inférieur (p. ex. $h_{\mathcal{Q}} = 500.0$ m).

Exclusion des points proches du bord

Pour chaque point $\mathbf{p}_{\text{grid}}^i$ de la grille $\mathcal{P}_{\text{grid}}$, on calcule la distance horizontale minimale au contour inférieur $\partial\mathcal{Q}$:

$$\text{dist}(\mathbf{p}_{\text{grid}}^i, \partial\mathcal{Q}) = \min_k \text{dist}(\mathbf{p}_{\text{grid}}^i, [\mathbf{p}_{\partial\mathcal{Q}}^i, \mathbf{p}_{\partial\mathcal{Q}}^{i+1}],) \quad (3.21)$$

et on élimine ceux vérifiant $\text{dist}(\mathbf{p}_{\text{grid}}^i, \partial\mathcal{Q}) < h_{\mathcal{Q}}$. Cela évite la création de triangles dégénérés à proximité immédiate du bord.

Triangulation plane inférieure

Les points conservés de $\mathcal{P}_{\text{grid}}$, combinés aux points du contour inférieur $\partial\mathcal{Q}$, forment un ensemble planaire sur lequel on applique une triangulation de Delaunay :

$$\mathcal{Q} = \text{Delaunay}(\partial\mathcal{Q} \cup \mathcal{P}_{\text{grid}}) \quad (3.22)$$

Les faces sont ensuite orientées de sorte à ce que leurs normales \mathbf{n} pointent vers le bas :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z < 0 \quad (3.23)$$

3.8.5 Polyèdre final

Le polyèdre fermé final est constitué de l'union suivante :

$$\mathcal{T} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{Q} \quad (3.24)$$

Avec, pour rappel :

- \mathcal{T} : Triangulation de la surface supérieure (topographie).
- \mathcal{S} : Triangulation des murs latéraux.
- \mathcal{Q} : Triangulation de la surface inférieure (socle).

Les figures 3.12 représentent un exemple de polyèdre final dans la région de Zeuzier (VS).

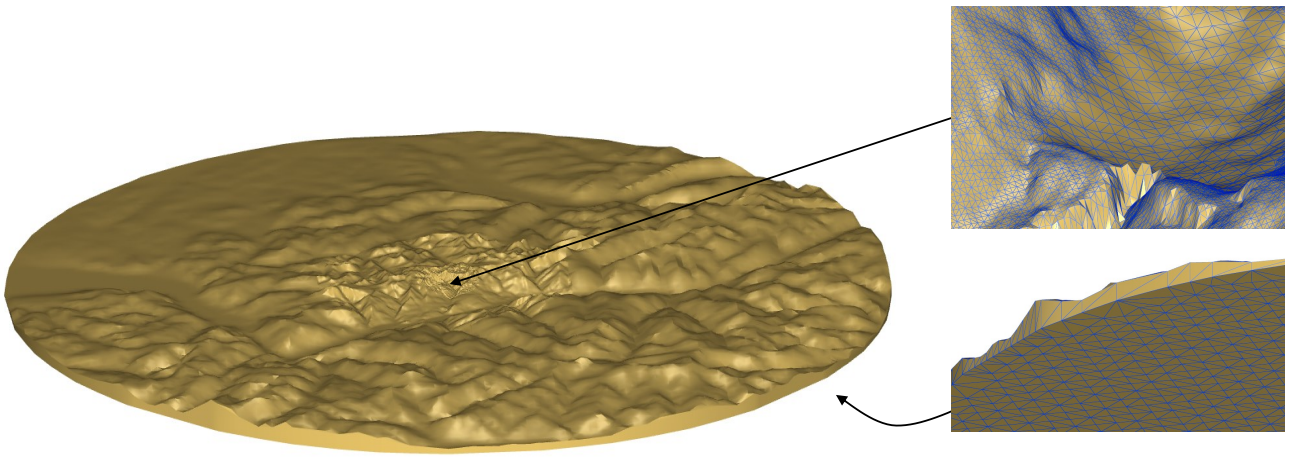


FIGURE 3.12 – Exemple d'un polyèdre mutli-résolution

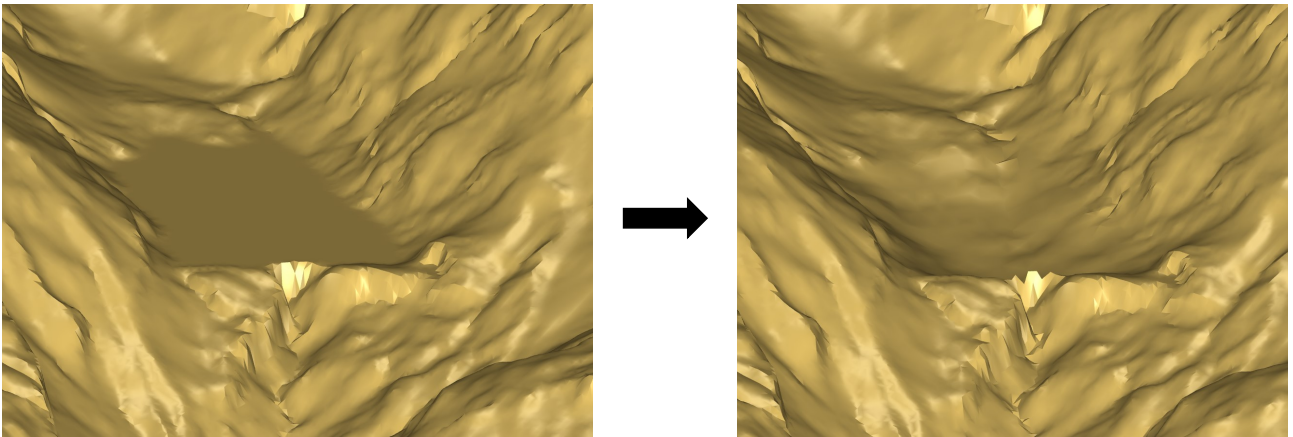


FIGURE 3.13 – Polyèdre avec et sans excavation du volume du lac artificiel de Zeuzier

De plus, la figure 3.13 (droite) met clairement en évidence la nécessité d'un modèle plus détaillé du barrage, en particulier en vue d'éventuelles mesures gravimétriques réalisées sur la couronne ou à l'intérieur de l'ouvrage.

Un polyèdre ainsi généré automatiquement, associé à une densité appropriée (p. ex. $2'670 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$), fournit alors un modèle de masse de base $\mathcal{M}_{\text{topo}}$, destiné à être complété ou ajusté manuellement à l'aide de données 3D supplémentaires.

Chapitre 4

Détermination de champs de gravité locaux

Ce chapitre passe en revue les éléments principaux utilisés lors de la détermination des fonctionnelles du champ de gravité local. La figure 4.1 illustre la méthode générale de cette détermination. Dans le cadre de ce travail, l'objectif est de prédire les fonctionnelles suivantes pour un ensemble de points \mathbf{x}^{pred} , souvent sous la forme d'une grille régulière :

- Cote de géoïde $\hat{N}(\mathbf{x}^{\text{pred}})$;
- Composante est-ouest de la déviation de la verticale à la surface (ou toute autre position) $\hat{\eta}(\mathbf{x}_{\text{topo}}^{\text{pred}})$;
- Composante nord-sud de la déviation de la verticale à la surface (ou toute autre position) $\hat{\xi}(\mathbf{x}_{\text{topo}}^{\text{pred}})$.

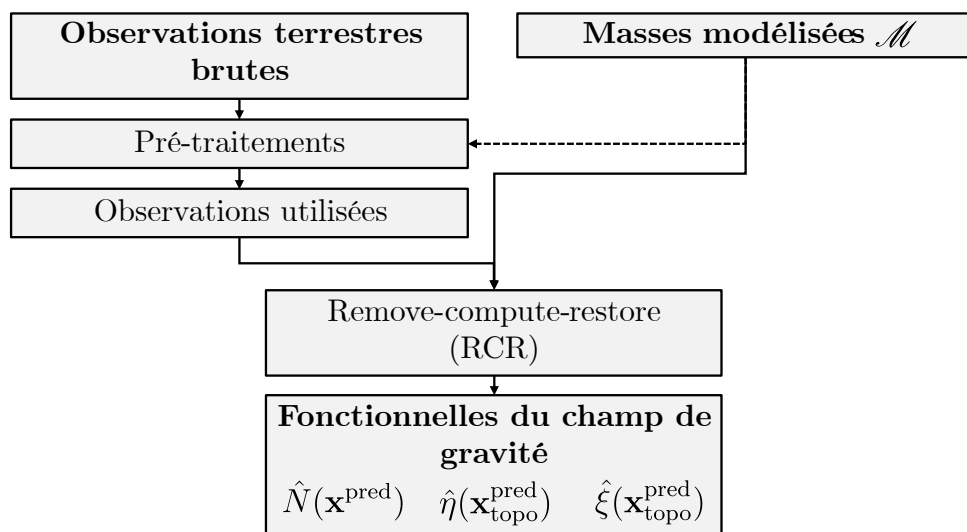


FIGURE 4.1 – Schéma de la détermination des fonctionnelles du champ de gravité local

4.1 Modèle mixte de la Terre

La Terre réelle peut être représentée par la décomposition de la figure 4.2 ci-dessous :

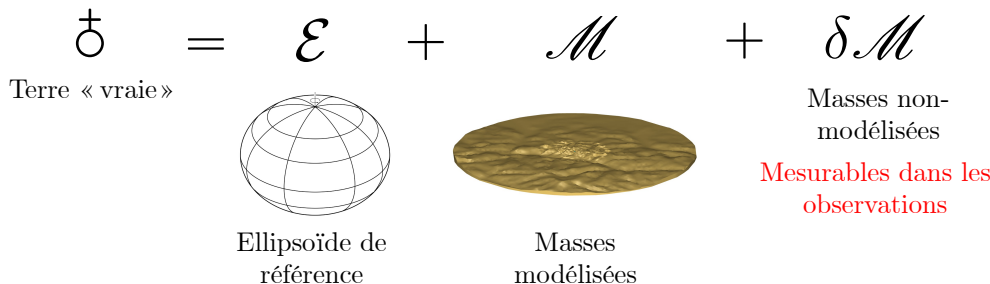


FIGURE 4.2 – Modèle mixte de la terre

A titre de précision, \mathcal{M} désigne l'ensemble des masses modélisées **en dehors de l'ellipsoïde de référence** et est aussi appelé « modèle de masse ». Toutes ces grandeurs constituent des concepts usuels dans la modélisation et l'analyse du champ de gravité terrestre et sont passablement utilisées dans ce travail.

4.2 Pré-traitements des observations brutes

Cette section importante traite du passage des observations brutes, réalisées sur le terrain, vers les observations utilisées dans une méthode d'estimation comme « remove-compute-restore ».

4.2.1 Déviations de la verticale

Les mesures astro-géodésiques permettent de déterminer les coordonnées astronomiques¹ $\Lambda(\mathbf{x}), \Phi(\mathbf{x})$ dans un système global (ITRS). À partir de ceci, il est nécessaire d'appliquer certains traitements afin d'obtenir la déviation de la verticale dans un système de coordonnées projetées, comme MN95.

Transformations entre systèmes

À l'issue des mesures sur le terrain, les éléments suivants sont utilisés :

- Coordonnées astronomiques $\Lambda_{\text{ITRS}}(\mathbf{x}), \Phi_{\text{ITRS}}(\mathbf{x})$ par astro-géodésie ;
- Coordonnées ellipsoïdales $\lambda_{\text{ITRS}}(\mathbf{x}), \phi_{\text{ITRS}}(\mathbf{x})$, par exemple via RTK-GNSS.

1. Les coordonnées astronomiques sont définies par la direction locale de la ligne d'aplomb, tandis que les coordonnées ellipsoïdales sont référencées à la normale à l'ellipsoïde de référence.

Ces deux types de coordonnées subissent ensuite une transformation usuelle de coordonnées (sans détails) :

$$\begin{aligned}\Lambda_{\text{ITRS}}(\mathbf{x}), \Phi_{\text{ITRS}}(\mathbf{x}) &\longrightarrow \Lambda_{\text{CH1903+}}(\mathbf{x}), \Phi_{\text{CH1903+}}(\mathbf{x}) \\ \lambda_{\text{ITRS}}(\mathbf{x}), \phi_{\text{ITRS}}(\mathbf{x}) &\longrightarrow \lambda_{\text{CH1903+}}(\mathbf{x}), \phi_{\text{CH1903+}}(\mathbf{x})\end{aligned}\quad (4.1)$$

Relation entre coordonnées ellipsoïdales et astronomiques

La relation entre les coordonnées ellipsoïdales et astronomiques d'une position peut s'établir facilement par les composantes de la déviation de la verticale $\eta(\mathbf{x}), \xi(\mathbf{x})$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\Lambda(\mathbf{x}) &= \lambda(\mathbf{x}) + \frac{\eta(\mathbf{x})}{\cos \phi(\mathbf{x})} \\ \Phi(\mathbf{x}) &= \phi(\mathbf{x}) + \xi(\mathbf{x})\end{aligned}\quad (4.2)$$

Ainsi, il est possible d'obtenir explicitement ces deux composantes dans le système CH1903+ :

$$\begin{aligned}\eta_{\text{CH1903+}}(\mathbf{x}) &= (\Lambda_{\text{CH1903+}}(\mathbf{x}) - \lambda_{\text{CH1903+}}(\mathbf{x})) \cdot \cos \phi_{\text{CH1903+}}(\mathbf{x}) \\ \xi_{\text{CH1903+}}(\mathbf{x}) &= \Phi_{\text{CH1903+}}(\mathbf{x}) - \phi_{\text{CH1903+}}(\mathbf{x})\end{aligned}\quad (4.3)$$

Transformation CH1903+ → MN95 projeté

Les composantes $\eta_{\text{CH1903+}}(\mathbf{x}), \xi_{\text{CH1903+}}(\mathbf{x})$ de la déviation de la verticale sont, par définition, données par rapport à un système topocentrique fixé sur la position considérée \mathbf{x} . Finalement, afin de les obtenir dans un système de coordonnées issu d'une projection conforme (E, N) , il est nécessaire d'appliquer une simple rotation qui dépend de la convergence du méridien $\mu(E, N)$:

$$\begin{pmatrix} \eta_{\text{MN95}}(E, N) \\ \xi_{\text{MN95}}(E, N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos[\mu(E, N)] & -\sin[\mu(E, N)] \\ \sin[\mu(E, N)] & \cos[\mu(E, N)] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta_{\text{CH1903+}}(\mathbf{x}) \\ \xi_{\text{CH1903+}}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}\quad (4.4)$$

Un exemple concret et numérique de ce pré-traitement est donné dans la section 7.2.1.

Par mesure de simplification, les termes $\eta_{\text{MN95}}(E, N), \xi_{\text{MN95}}(E, N)$ s'écrivent $\eta(\mathbf{x}), \xi(\mathbf{x})$ dans le présent document.

4.2.2 GNSS-nivellement

L'objectif du GNSS-nivellement est d'accéder directement à une cote du géoïde N , c'est-à-dire la comparaison entre l'ellipsoïde de référence \mathcal{E} (p. ex. Bessel) et le géoïde \mathcal{G} dans le même système TRS (p. ex. CH1903+). Pour rappel, le lien entre ces éléments est donné par :

$$\boxed{N(\mathbf{x}) = h^{\text{ell}}(\mathbf{x}) - H^{\text{orth}}(\mathbf{x})}\quad (4.5)$$

avec :

- $h(\mathbf{x})$: altitude ellipsoïdale d'une position \mathbf{x} [m] ;
- $H^{\text{orth}}(\mathbf{x})$: altitude orthométrique d'une position \mathbf{x} [m].

Le premier terme géométrique $h(\mathbf{x})$ est facilement obtenu par GNSS. En revanche, la détermination de l'altitude orthométrique $H^{\text{orth}}(\mathbf{x})$ est le principal point critique du GNSS-nivellement. De façon générale, on obtient cette dernière en combinant un nivellement géométrique et des mesures gravimétriques de $g(\mathbf{x})$ le long du cheminement.

Dans le cadre de ce travail, l'accent est toutefois mis sur la notion de dénivelée. En effet, les altitudes orthométriques ou GNSS absolues de qualité suffisante ne sont pas systématiquement accessibles pour des applications très locales.

La figure 4.3 illustre le procédé général du GNSS-nivellement à partir des dénivelées brutes le long d'un cheminement \mathcal{S}_{AB} entre les points \mathbf{x}_A et \mathbf{x}_B . Le terme E^{orth} est appelé *correction orthométrique* et permet de passer d'une dénivelée usuelle $\Delta H^u(\mathbf{x})$ (issue du nivellement géométrique) vers une dénivelée orthométrique $\Delta H^{\text{orth}}(\mathbf{x})$.

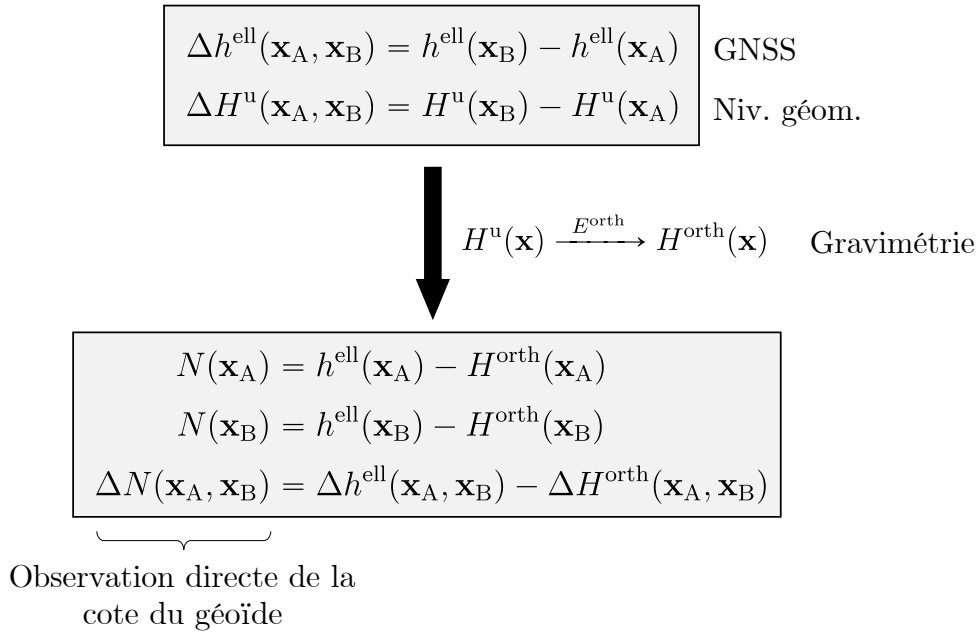


FIGURE 4.3 – Objectif général du GNSS-nivellement

Correction orthométrique

La correction orthométrique E^{orth} le long d'un cheminement \mathcal{S}_{AB} d'un point \mathbf{x}_A à un point \mathbf{x}_B relie simplement la dénivelée usuelle ΔH^u à la dénivelée orthométrique ΔH^{orth} de la manière suivante :

$$\Delta H^{\text{orth}}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) = \Delta H^u(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, \mathcal{S}_{AB}) + E^{\text{orth}}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, \mathcal{S}_{AB}) \quad (4.6)$$

La correction orthométrique est donnée (sans démonstration) par :

$$\begin{aligned}
 E^{\text{orth}}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, \mathcal{S}_{AB}) &= \int_{\mathbf{x}_A, \mathcal{S}_{AB}}^{\mathbf{x}_B} \frac{g(\mathbf{x}) - \gamma_0}{\gamma_0} \cdot dn \\
 &+ \frac{\bar{g}(\mathbf{x}_A) - \gamma_0}{\gamma_0} \cdot H^{\text{orth}}(\mathbf{x}_A) - \frac{\bar{g}(\mathbf{x}_B) - \gamma_0}{\gamma_0} \cdot H^{\text{orth}}(\mathbf{x}_B)
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

avec :

- γ_0 : gravité normale sur l'ellipsoïde $\approx 9.81 \text{ [m} \cdot \text{s}^{-2} \text{]}$;
- $g(\mathbf{x})$: gravité mesurée le long du chemin $[\text{m} \cdot \text{s}^{-2} \text{}]$;
- dn : différences de niveaux successives $[\text{m}]$;
- $\bar{g}(\mathbf{x}_A)$: gravité moyenne le long de la ligne d'aplomb à la position \mathbf{x}_A $[\text{m} \cdot \text{s}^{-2} \text{}]$;
- $\bar{g}(\mathbf{x}_B)$: gravité moyenne le long de la ligne d'aplomb à la position \mathbf{x}_B $[\text{m} \cdot \text{s}^{-2} \text{}]$.

En pratique, l'obtention du premier terme de l'équation 4.7 nécessite de disposer de mesures de $g(\mathbf{x})$ réalisées à intervalles réguliers, typiquement tous les 100 à 500 m, ou dès que la différence d'altitude entre deux points excède environ 20 à 30 m. Ensuite, il est possible d'approximer numériquement cette intégrale par la méthode des rectangles :

$$\int_{\mathbf{x}_A, \mathcal{S}_{AB}}^{\mathbf{x}_B} \frac{g(\mathbf{x}) - \gamma_0}{\gamma_0} \cdot dn \approx \sum_i \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{g(\mathbf{x}_i) - \gamma_0}{\gamma_0} + \frac{g(\mathbf{x}_{i+1}) - \gamma_0}{\gamma_0} \right] \cdot \Delta n_i \tag{4.8}$$

Gravité moyenne le long de la ligne d'aplomb

Le deuxième terme de l'équation 4.7 fait intervenir la gravité moyenne le long de la ligne d'aplomb en une position donnée. Il existe deux principales méthodes pour l'obtenir (GUILLAUME, 2015) :

1. à partir d'un modèle de masse \mathcal{M} et de la gravité normale de l'ellipsoïde \mathcal{E} ;
2. à partir d'un modèle de masse \mathcal{M} , de la gravité normale de l'ellipsoïde \mathcal{E} et d'une observation de la gravité à la position \mathbf{x} (en surface).

Il convient de souligner que l'altitude orthométrique $H^{\text{orth}}(\mathbf{x}_{\text{topo}})$ intervient de façon implicite dans sa propre détermination selon l'équation 4.7. Cependant, elle n'est qu'un facteur du terme qui contient la gravité moyenne. Une erreur relative de 1% n'aurait qu'un impact de 1% sur la correction orthométrique finale.

Méthode 1 - sans observation

La première méthode exposée ci-dessous a l'avantage de ne pas nécessiter d'observation de la gravité à la surface. La gravité moyenne le long de la ligne d'aplomb est approximée par :

$$\bar{g}(\mathbf{x}) \approx \underbrace{\gamma_0 + \tau_o \cdot H^{\text{orth}}(\mathbf{x}_{\text{topo}})}_{\text{modélisé : } \mathcal{E}} - \underbrace{\frac{\Phi_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_{\text{topo}}) - \Phi_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_0)}{H^{\text{orth}}(\mathbf{x}_{\text{topo}})}}_{\text{modélisé : } \mathcal{M}} \tag{4.9}$$

avec :

- τ_o : gradient de la gravité normale γ_o généré par l'ellipsoïde \mathcal{E} ($\approx -0.3086 \cdot 10^{-5}$) [s^{-2}];
- $\Phi_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_{\text{topo}})$: potentiel gravitationnel à la surface généré par les masses modélisées \mathcal{M} [$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$];
- $\Phi_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_0)$: potentiel gravitationnel à $H^{\text{orth}}(\mathbf{x}) = 0$ généré par les masses modélisées \mathcal{M} [$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$].

Méthode 2 - avec observation à la surface

Dans la pratique, il est courant de pouvoir observer la gravité à la position \mathbf{x}_{topo} puisque la correction orthométrique nécessite de toute manière des mesures gravimétriques le long du cheminement. Cette seconde méthode permet de prendre en compte certains effets locaux générés par les masses non-modélisées $\delta\mathcal{M}$. Formellement, la gravité moyenne est donnée par :

$$\bar{g}(\mathbf{x}) \approx \underbrace{g_{\text{tot}}(\mathbf{x}_{\text{topo}})}_{\text{observé}} - \underbrace{\frac{\tau_o}{2} \cdot H^{\text{orth}}(\mathbf{x}_{\text{topo}})}_{\text{modélisé : } \mathcal{E}} - \underbrace{g_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_{\text{topo}}) - \frac{\Phi_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_{\text{topo}}) - \Phi_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_0)}{H^{\text{orth}}(\mathbf{x}_{\text{topo}})}}_{\text{modélisé : } \mathcal{M}} \quad (4.10)$$

avec :

- $g_{\text{tot}}(\mathbf{x}_{\text{topo}})$: gravité totale observée à la surface ($\mathcal{E} + \mathcal{M} + \delta\mathcal{M}$) [$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$];
- $g_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_{\text{topo}})$: accélération gravitationnelle à la surface générée par les masses modélisées \mathcal{M} [$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$].

Observation finale ΔN

Selon les éléments présentés et l'équation 4.6, il est désormais possible d'obtenir des observations de différence de cote du géoïde ΔN utilisables dans la méthode « remove-compute-restore » :

$$\mathbf{l}_{\Delta N} = \begin{pmatrix} \Delta N_i \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Exemple numérique

Un exemple de cheminement est présenté dans la figure 4.4.

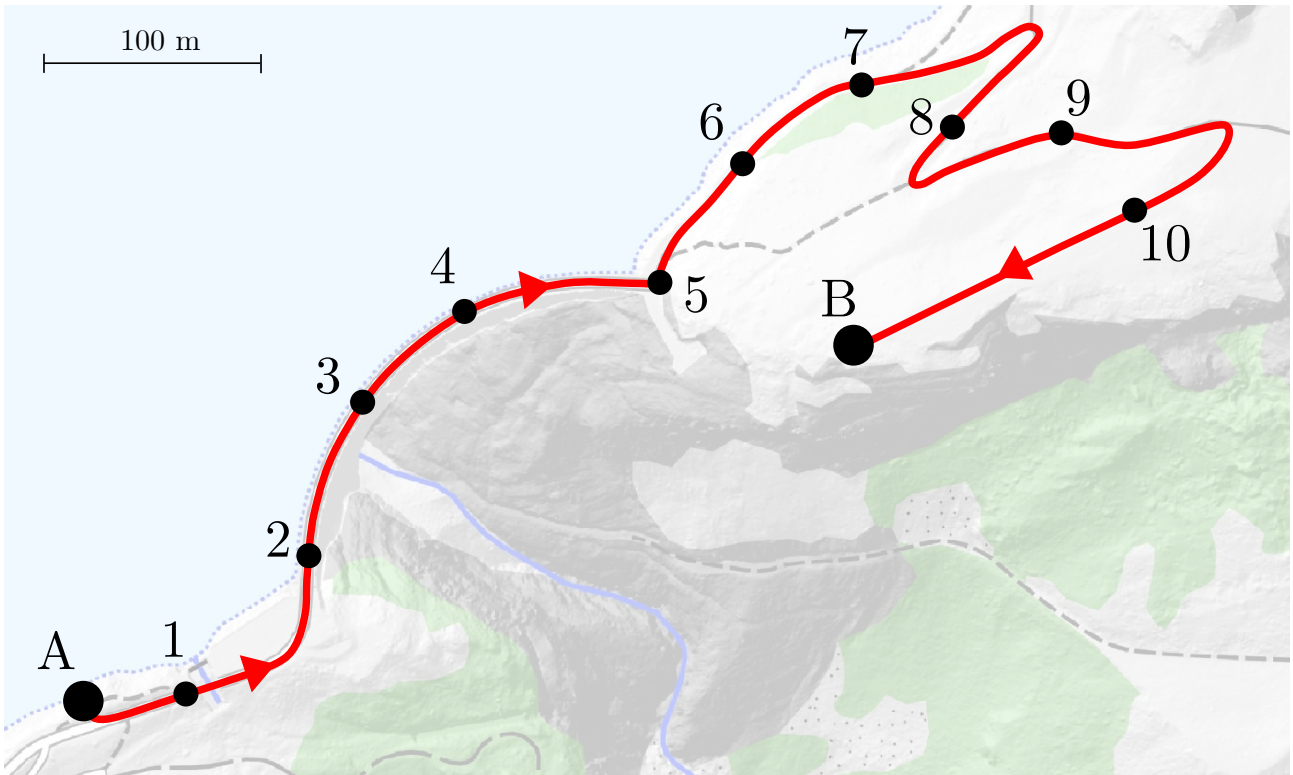


FIGURE 4.4 – Exemple d'un cheminement entre un point A et un point B aux abords du barrage de Zeuzier (VS)

Le tableau 4.12 ci-dessous présente les observations réalisées tout au long du cheminement.

	$g_i(\mathbf{x}_{\text{topo}})$ [mgal]	Δn_i [m]	
A	980229.152	0.000	
1	980228.638	-4.6167	
2	980226.725	0.038	
3	980226.630	0.031	
4	980228.848	-0.014	
5	980229.083	2.300	
6	980228.970	1.328	
7	980225.605	13.293	
8	980224.926	7.933	
9	980222.998	8.293	
10	980221.871	1.856	
B	980221.011	-0.954	(4.12)

Les positions des points ne sont pas listées ici, mais sont utilisées lors de la détermination de la gravité moyenne.

En premier lieu, il est nécessaire d'appliquer numériquement l'équation 4.8 :

$$\int_{\mathbf{x}_A, \mathcal{S}_{AB}}^{\mathbf{x}_B} \frac{g(\mathbf{x}) - \gamma_0}{\gamma_0} \cdot dn \approx \sum_i \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{g(\mathbf{x}_i) - \gamma_0}{\gamma_0} + \frac{g(\mathbf{x}_{i+1}) - \gamma_0}{\gamma_0} \right] \cdot \Delta n_i \quad (4.13)$$

$$\approx -0.0116 \text{ [m]}$$

Puis, la gravité moyenne le long de la ligne d'aplomb en A et B est donnée par l'équation 4.10 :

$$\begin{aligned} \bar{g}(\mathbf{x}_A) &\approx g(\mathbf{x}_{A,\text{topo}}) - \frac{\tau_o}{2} \cdot H^{\text{orth}}(\mathbf{x}_{A,\text{topo}}) - g_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_{A,\text{topo}}) - \frac{\Phi_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_{A,\text{topo}}) - \Phi_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_{A,0})}{H^{\text{orth}}(\mathbf{x}_{A,\text{topo}})} \\ &\approx 9.80228638 - (-0.00275111) - 0.00179468 - 0.000183757 \\ &\approx 9.80303474 \text{ [m} \cdot \text{s}^{-2}] \quad \text{ou} \quad 980303.474 \text{ [mgal]} \\ \bar{g}(\mathbf{x}_B) &\approx 9.80302396 \text{ [m} \cdot \text{s}^{-2}] \quad \text{ou} \quad 980302.396 \text{ [mgal]} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Une fois la gravité moyenne obtenue, l'application numérique de la formule 4.7 au complet vaut :

$$\begin{aligned} E^{\text{orth}}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, \mathcal{S}_{AB}) &= \int_{\mathbf{x}_A, \mathcal{S}_{AB}}^{\mathbf{x}_B} \frac{g(\mathbf{x}) - \gamma_0}{\gamma_0} \cdot dn \\ &\quad + \frac{\bar{g}(\mathbf{x}_A) - \gamma_0}{\gamma_0} \cdot H^{\text{orth}}(\mathbf{x}_A) - \frac{\bar{g}(\mathbf{x}_B) - \gamma_0}{\gamma_0} \cdot H^{\text{orth}}(\mathbf{x}_B) \\ &\approx -0.0116 + (-0.5628) - (-0.5741) \\ &\approx -0.0003 \text{ [m]} \quad \text{ou} \quad -0.3 \text{ [mm]} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Dans ce cas, la correction orthométrique est très faible, mais sur des cas similaires, elle peut facilement atteindre une valeur centimétrique.

Pour terminer, on peut former l'observation finale ΔN_i . Selon la figure 4.3, il suffit d'appliquer numériquement la formule suivante :

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta N(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) &= \Delta h^{\text{ell}}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) - \Delta H^{\text{orth}}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) \\ &= 29.4975 - 29.4868 = 0.0107 \text{ [m]} \end{aligned}} \quad (4.16)$$

où :

$$\begin{aligned} \Delta H^{\text{orth}}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) &= \Delta H^u(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, \mathcal{S}_{AB}) + E^{\text{orth}}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, \mathcal{S}_{AB}) \\ &= 29.4871 + (-0.0003) = 29.4868 \text{ [m]} \end{aligned} \quad (4.17)$$

avec :

- $\Delta h^{\text{ell}}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B)$: dénivelée ellipsoïdale obtenue par GNSS [m] ;
- $\Delta H^u(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, \mathcal{S}_{AB})$: dénivelée usuelle obtenue par nivellement géométrique [m].

Il est tout à fait possible de comparer cette observation avec les cotes du géoïde CHGeo2004 :

$$N_{\text{CH04}}(\mathbf{x}_B) - N_{\text{CH04}}(\mathbf{x}_A) = 1.1146 - 1.1026 = 0.0120 \text{ [m]} \quad (4.18)$$

ce qui rend l'exemple numérique cohérent ($\Delta = 1.2$ [mm]).

L'analyse de la précision de ces éléments est exposée dans le chapitre 5 qui traite des simulations en circuit fermé.

4.3 Positions de prédiction

Dans le cadre de la détermination des fonctionnelles du champ de gravité, il est essentiel de définir les positions pour lesquelles ces grandeurs doivent être estimées. Selon les besoins pratiques, plusieurs types de positions peuvent être considérés :

- les positions spécifiques, correspondant à des points d'intérêt où des corrections seront appliquées directement sur des mesures instrumentales, par exemple des piliers d'un réseau géodésique ou des positions le long d'un tunnel ;
- les positions définies sous la forme d'une grille régulière, permettant une analyse spatiale homogène et une appréciation globale du comportement des fonctionnelles du champ de gravité sur la zone d'étude ;
- une combinaison des deux approches.

Les positions spécifiques sont généralement faciles à définir, car elles correspondent à des points dont les coordonnées et altitudes approximatives sont connues. En revanche, dans le cas d'une grille régulière, il est souvent souhaitable de prédire la déviation de la verticale à la surface topographique.

Pour ce faire, les positions de prédiction sont d'abord définies en deux dimensions par la génération d'une grille régulière, à partir d'une taille de maille donnée et d'une boîte englobante. Les nœuds de cette grille sont ensuite projetés verticalement jusqu'à leur intersection avec un modèle de la topographie, représenté sous la forme d'un polyèdre. Cette étape repose sur un lancer de rayons (voir figure 4.5), effectué par exemple par la librairie `open3d`.

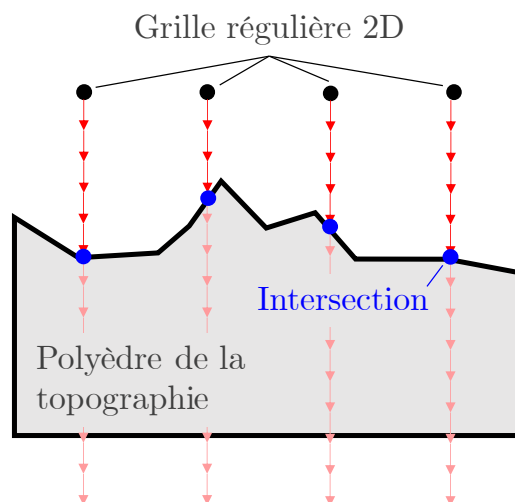


FIGURE 4.5 – Illustration du procédé de lancer de rayons sur un polyèdre de la topographie

4.4 Méthode « remove-compute-restore »

La méthode *remove-compute-restore* consiste à séparer les contributions modélisées du champ de gravité des variations locales que l'on souhaite estimer (GUILLAUME, 2024). Elle s'appuie sur un modèle de masse \mathcal{M} capable de reproduire les composantes du champ liées aux longueurs d'onde inférieures à $\approx 20[\text{km}]$. Les observations effectuées sur la topographie sont d'abord débarrassées de l'effet de ces masses, ce qui réduit fortement leur contenu en petites longueurs d'onde (remove). Les données ainsi réduites permettent de déterminer le co-géoïde, une surface correspondant à l'équipotentielle dépourvue des effets du modèle de masse (compute). Enfin, les contributions de \mathcal{M} sont simplement réintroduites afin d'obtenir le géoïde réel et les fonctionnelles complètes du champ en n'importe quelle position (restore). La figure 4.6 illustre le processus général de cette méthode. Un exemple complet et détaillé d'un cas réel est donné dans le chapitre 7.

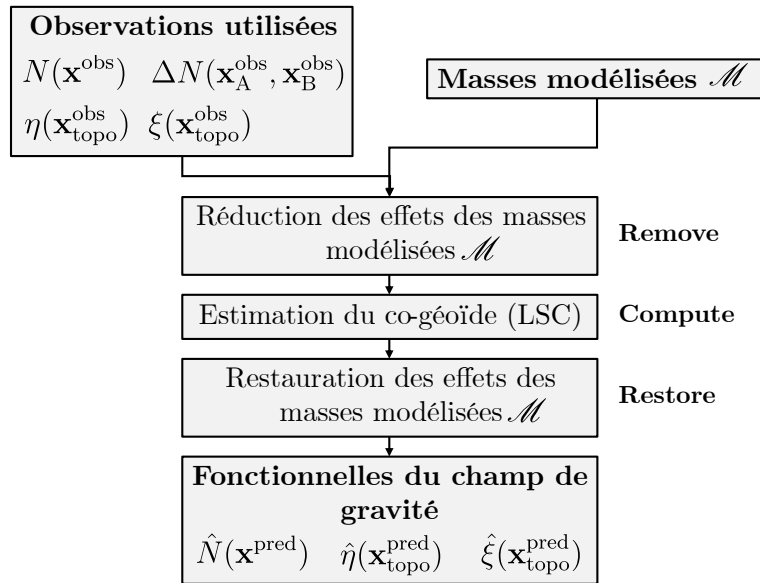


FIGURE 4.6 – Schéma de la méthode remove-compute-restore

4.4.1 Réduction des effets des modèles (remove)

La première étape consiste à isoler le modèle des masses résiduelles :

$$\underbrace{\delta\mathcal{M}}_{\text{à déterminer}} = \underbrace{\delta}_{\text{observé}} - \underbrace{\mathcal{E}}_{\text{modélisé}} - \underbrace{\mathcal{M}}_{\text{modélisé}} \quad (4.19)$$

Afin d'y parvenir, il faut être en mesure de déterminer chaque fonctionnelle du champ de gravité à partir du modèle de masse \mathcal{M} et d'un ellipsoïde de référence \mathcal{E} .

Détermination des fonctionnelles générées par \mathcal{M} et \mathcal{E}

Tout d'abord, il est nécessaire de déterminer certaines fonctionnelles du champ gravitationnel $V_{\mathcal{M}}$ généré par le modèle de masse \mathcal{M} en chaque position \mathbf{x} . Les détails mathématiques d'une telle détermination se trouvent dans la section 2.4.

Détermination d'une cote du géoïde à partir du potentiel $V_{\mathcal{M}}$

La cote du géoïde est donnée par l'application de la formule de *Brun* (voir éq. 2.43) :

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) &= \frac{T(\mathbf{x}_G)}{g(\mathbf{x}_E)} \\ &\approx \frac{V_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_G)}{9.81} \end{aligned} \quad (4.20)$$

avec :

- $T(\mathbf{x}_G)$: potentiel perturbateur [$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$];
- $g(\mathbf{x}_E)$: accélération de gravité sur l'ellipsoïde de référence \mathcal{E} , approchée à 9.81 [$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$].

Détermination d'une différence de cotes du géoïde à partir du potentiel $V_{\mathcal{M}}$

Cette fonctionnelle est simplement formée à partir des cotes du géoïde aux point \mathbf{x}_A et \mathbf{x}_B :

$$\begin{aligned} \Delta N_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) &= N(\mathbf{x}_B) - N(\mathbf{x}_A) \\ &\approx \frac{V_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_B^G) - V_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_A^G)}{9.81} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Détermination d'une déviation de la verticale à partir des accélérations gravitationnelles $\mathbf{g}_{\mathcal{M}}$

Les premières dérivées du potentiel gravitationnel $V_{\mathcal{M}}$ peuvent s'écrire :

$$\nabla V_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_{x,\mathcal{M}}(\mathbf{x}) \\ g_{y,\mathcal{M}}(\mathbf{x}) \\ g_{z,\mathcal{M}}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

avec g_x, g_y, g_z , les accélérations gravitationnelles dans les composantes x, y et z [$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$] du système utilisé. Dès lors où la détermination se déroule dans un système de coordonnées projetées (p. ex. MN95), x et y désignent respectivement les axes Est et Nord.

Les deux composantes de la déviation de la verticale sont également reliées au potentiel perturbateur (voir éq. 2.46) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \eta_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{g(\mathbf{x})} \cdot \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial x} = -\frac{1}{g(\mathbf{x})} \cdot g_{x,\mathcal{M}}(\mathbf{x}) \\ \xi_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{g(\mathbf{x})} \cdot \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial y} = -\frac{1}{g(\mathbf{x})} \cdot g_{y,\mathcal{M}}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned}\eta_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) &\approx -\frac{1}{9.81} \cdot g_{x,\mathcal{M}}(\mathbf{x}) \\ \xi_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) &\approx -\frac{1}{9.81} \cdot g_{y,\mathcal{M}}(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{4.24}$$

Sachant que $g(\mathbf{x}) \gg g_{x,\mathcal{M}_i}(\mathbf{x})$ et $g(\mathbf{x}) \gg g_{y,\mathcal{M}_i}(\mathbf{x})$, l'approximation $g(\mathbf{x}) \approx 9.81 \text{ [m} \cdot \text{s}^{-2}]$ n'engendre que de très faibles variations ($< 0.1\%$) sur la déviation de la verticale.

Réduction des observations

Il est à présent possible de réduire les observations réalisées :

$$\begin{aligned}N_{\delta,\mathcal{M}}(\mathbf{x}^{\text{obs}}) &= N(\mathbf{x}^{\text{obs}}) - N_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}^{\text{obs}}) \\ \Delta N_{\delta,\mathcal{M}}(\mathbf{x}_A^{\text{obs}}, \mathbf{x}_B^{\text{obs}}) &= \Delta N(\mathbf{x}_A^{\text{obs}}, \mathbf{x}_B^{\text{obs}}) - \Delta N_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_A^{\text{obs}}, \mathbf{x}_B^{\text{obs}}) \\ \eta_{\delta,\mathcal{M}}(\mathbf{x}_{\mathcal{G}}^{\text{obs}}) &= \eta(\mathbf{x}_{\text{topo}}^{\text{obs}}) - \eta_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_{\text{topo}}^{\text{obs}}) \\ \xi_{\delta,\mathcal{M}}(\mathbf{x}_{\mathcal{G}}^{\text{obs}}) &= \xi(\mathbf{x}_{\text{topo}}^{\text{obs}}) - \xi_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_{\text{topo}}^{\text{obs}})\end{aligned}\tag{4.25}$$

avec :

- $N(\mathbf{x}^{\text{obs}})$: observation de cote du géoïde [m] ;
- $\Delta N(\mathbf{x}_A^{\text{obs}}, \mathbf{x}_B^{\text{obs}})$: observation de différence de cote du géoïde [m] ;
- $\eta(\mathbf{x}_{\text{topo}}^{\text{obs}})$: observation de déviation de la verticale à la surface topographique [rad] ;
- $\xi(\mathbf{x}_{\text{topo}}^{\text{obs}})$: observation de déviation de la verticale à la surface topographique [rad].

Les deux dernières lignes de l'équation 4.25 ne font pas explicitement intervenir la réduction topographie \rightarrow géoïde. En effet, si la réduction d'une composante de la déviation de la verticale sur le géoïde vaut :

$$\eta(\mathbf{x}_{\mathcal{G}}) = \eta(\mathbf{x}_{\text{topo}}) + [\eta_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_{\mathcal{G}}) - \eta_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_{\text{topo}})]\tag{4.26}$$

alors :

$$\begin{aligned}\eta_{\delta,\mathcal{M}}(\mathbf{x}_{\mathcal{G}}) &= \eta(\mathbf{x}_{\mathcal{G}}) - \eta_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_{\mathcal{G}}) \\ &= \left\{ \eta(\mathbf{x}_{\text{topo}}) + [\eta_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_{\mathcal{G}}) - \eta_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_{\text{topo}})] \right\} - \eta_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_{\mathcal{G}}) \\ &= \eta(\mathbf{x}_{\text{topo}}) - \eta_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_{\text{topo}})\end{aligned}\tag{4.27}$$

Bien entendu, ce procédé est identique pour la composante ξ .

4.4.2 Détermination du co-géoïde (compute)

À partir des observations réduites, il devient possible d'estimer la cote du co-géoïde $N_{\delta,\mathcal{M}}(\mathbf{x})$ ainsi que toute autre fonctionnelle associée, pour n'importe quelle position. Pour alléger les notations dans cette section, l'indice δ,\mathcal{M} sera omis et une position sera donnée par \mathbf{r}_i pour éviter toute confusion.

La méthode d'estimation utilisée couramment pour ce genre de problématique est la *collocation par moindres carrés* (LSC). Les développements mathématiques exposés font référence au

support de cours « Éléments de géodésie », GUILLAUME, 2024.

Modèle de Gauss-markov classique

Le modèle mathématique classique de Gauss-Markov est le suivant :

$$\mathbf{l} + \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) \quad \text{avec : } \mathbf{l} \sim \mathcal{N}(\check{\mathbf{l}}, \mathbf{K}_{\mathbf{ll}}) \quad \text{et} \quad \mathbf{v} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{K}_{\mathbf{vv}}) \quad (4.28)$$

avec :

- \mathbf{l} : vecteur des observations ;
- $\hat{\mathbf{x}}$: vecteur des inconnues estimées ;
- $\hat{\mathbf{v}}$: vecteur des résidus estimés ;
- $\mathbf{K}_{\mathbf{ll}}$: matrice variance-covariance des observations ;
- $\mathbf{K}_{\mathbf{vv}}$: matrice variance-covariance des résidus ($\mathbf{K}_{\mathbf{vv}} = \mathbf{K}_{\mathbf{ll}}$).

La figure 4.7 résume graphiquement les termes principaux intervenant dans l'ajustement d'une droite à un ensemble de points.

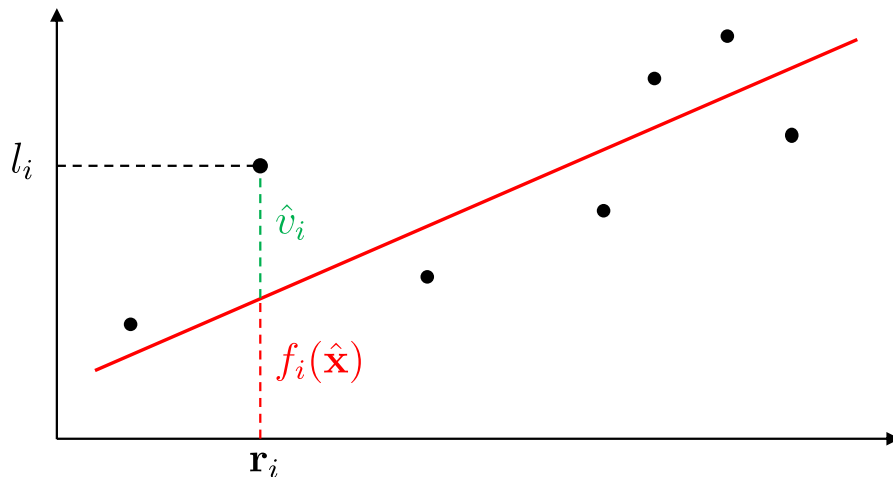


FIGURE 4.7 – Modèle d'un ajustement classique d'une droite

Extension du modèle classique

Pour la collocation, le modèle de Gauss-Markov est étendu en reconsidérant la nature des résidus $\hat{\mathbf{v}}$. Ceux-ci sont décomposés en deux contributions : une composante $\hat{\mathbf{n}}$ représentant le *bruit non corrélé*, et une composante $\hat{\mathbf{s}}$ décrivant le *signal corrélé* (voir figure 4.8) :

$$\hat{\mathbf{v}} = -(\hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{n}}) \quad (4.29)$$

Ainsi, le modèle mathématique devient :

$$\mathbf{l} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{n}} \quad \text{avec : } \mathbf{s} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{K}_{\mathbf{ss}}) \quad \text{et} \quad \mathbf{n} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{K}_{\mathbf{nn}}) \quad (4.30)$$

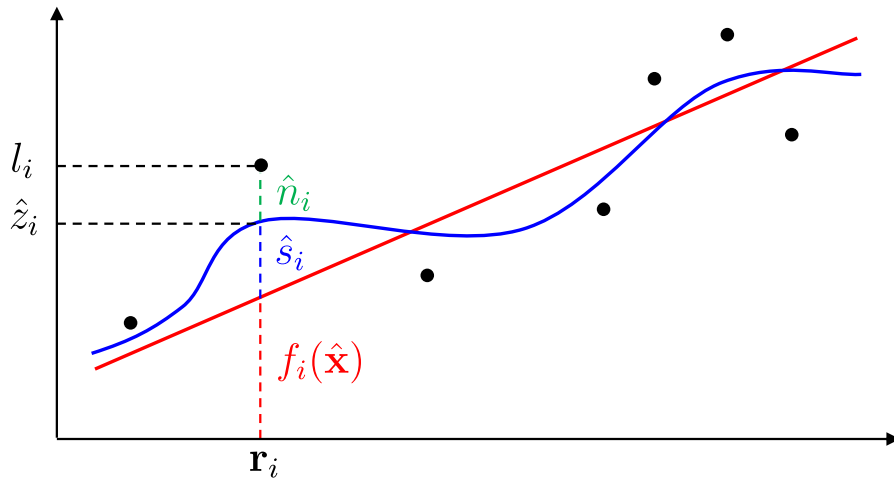


FIGURE 4.8 – Modèle de la collocation par moindres carrés d’une droite

Un aspect central de la méthode, qui motive la décomposition explicite des résidus $\hat{\mathbf{v}}$ en deux contributions, est la possibilité de définir le vecteur $\hat{\mathbf{z}}$, souvent appelé *signal total* (voir figure 4.8). Celui-ci regroupe la partie déterministe $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$ et la partie du signal corrélé $\hat{\mathbf{s}}$:

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{s}} \quad (4.31)$$

En d’autres termes, il s’agit du vecteur des observations dé-bruitées : $\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{l} - \hat{\mathbf{n}}$.

Tout comme le modèle classique, il est tout à fait possible d’utiliser la collocation comme un algorithme de prédiction pour tout \mathbf{r}_i^* . Formellement, un signe \star est ajouté aux termes vus précédemment pour désigner les éléments aux positions de prédiction (voir figure 4.9) :

$$\hat{\mathbf{z}}^* = \mathbf{f}^*(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{s}}^* \quad (4.32)$$

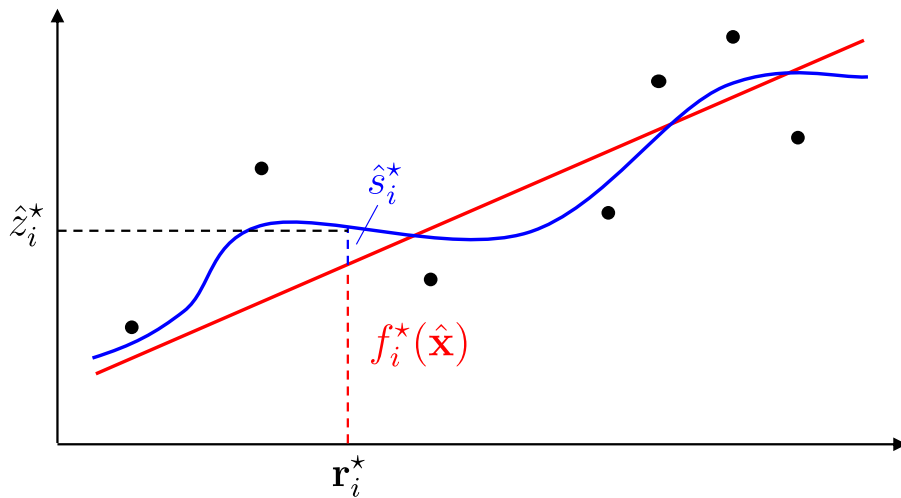


FIGURE 4.9 – Modèle d’une prédiction avec la collocation par moindres carrés d’une droite

Modèle mathématique de l'estimation du co-géoïde

L'équation 4.30 appliquée à l'estimation de la cote du co-géoïde et de ses fonctionnelles est donnée par :

$$\mathbf{l} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{n}}$$

$$\begin{pmatrix} l_N \\ l_{\Delta N} \\ l_\eta \\ l_\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_N(\hat{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{f}_{\Delta N}(\hat{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{f}_\eta(\hat{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{f}_\xi(\hat{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{s}}_N \\ \hat{\mathbf{s}}_{\Delta N} \\ \hat{\mathbf{s}}_\eta \\ \hat{\mathbf{s}}_\xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{n}}_N \\ \hat{\mathbf{n}}_{\Delta N} \\ \hat{\mathbf{n}}_\eta \\ \hat{\mathbf{n}}_\xi \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

et le modèle stochastique :

$$\mathbf{K}_{\text{ss}} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{s_N s_N} & \mathbf{K}_{s_N s_{\Delta N}} & \mathbf{K}_{s_N s_\eta} & \mathbf{K}_{s_N s_\xi} \\ \mathbf{K}_{s_{\Delta N} s_N} & \mathbf{K}_{s_{\Delta N} s_{\Delta N}} & \mathbf{K}_{s_{\Delta N} s_\eta} & \mathbf{K}_{s_{\Delta N} s_\xi} \\ \mathbf{K}_{s_\eta s_N} & \mathbf{K}_{s_\eta s_{\Delta N}} & \mathbf{K}_{s_\eta s_\eta} & \mathbf{K}_{s_\eta s_\xi} \\ \mathbf{K}_{s_\xi s_N} & \mathbf{K}_{s_\xi s_{\Delta N}} & \mathbf{K}_{s_\xi s_\eta} & \mathbf{K}_{s_\xi s_\xi} \end{pmatrix}, \mathbf{K}_{\text{nn}} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{n_N n_N} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{n_{\Delta N} n_{\Delta N}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{n_\eta n_\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{n_\xi n_\xi} \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

avec :

- indice N : termes associés à la cote du co-géoïde ;
- indice ΔN : termes associés à la différence de cotes du co-géoïde ;
- indice η : termes associés à la composante est-ouest de la DoV ;
- indice ξ : termes associés à la composante nord-sud de la DoV ;

Vecteur des inconnues $\hat{\mathbf{x}}$

Le vecteur des inconnues $\hat{\mathbf{x}}$ de cette estimation contient les paramètres d'un plan à ajuster :

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{z}_0 \\ \hat{p}_x \\ \hat{p}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{N} \\ \frac{\partial \hat{N}}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{N}}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

Ce plan, évalué en toute position, forme la partie déterministe du signal $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$ ou $\mathbf{f}^*(\hat{\mathbf{x}})$

Fonction de covariance

Afin de pouvoir établir la matrice de variance-covariance des signaux corrélés \mathbf{K}_{ss} , il est nécessaire de sélectionner une fonction de covariance adaptée au signal de la cote du co-géoïde $\mathcal{C}_{N,N}$. Une telle fonction permet d'évaluer la covariance entre deux cotes du co-géoïde en fonction de leur position respective. À titre d'exemple, le géoïde suisse CHGeo2004 repose sur une fonction de covariance de type Markov d'ordre 3 (MARTI, 2016) :

$$\mathcal{C}_{s_N s_N}(x_i, y_i, x_j, y_j) = \sigma_{s_N}^2 \cdot \left(1 + \frac{d_{ij}}{d_{\text{corr}}} + \frac{d_{ij}^2}{3 d_{\text{corr}}^2} \right) \cdot e^{-d_{ij}/d_{\text{corr}}} \quad (4.36)$$

avec :

$$d_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (4.37)$$

et d_{corr} , qui désigne la distance caractéristique de corrélation. Les autres fonctions de covariance nécessaires à l'établissement des matrices de variance-covariance pour les différentes fonctionnelles ($\mathcal{C}_{N\Delta N}$, $\mathcal{C}_{N\eta}$, $\mathcal{C}_{\eta\eta}$, etc.) peuvent être obtenues à partir de \mathcal{C}_{NN} par propagation fonctionnelle. Ces relations sont les suivantes :

$$\begin{aligned} N(\mathbf{r}) &= N(\mathbf{r}) \\ \Delta N(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) &= N(\mathbf{r}_B) - N(\mathbf{r}_A) \\ \eta(\mathbf{r}) &= -\frac{\partial N(\mathbf{r})}{\partial x} \\ \xi(\mathbf{r}) &= -\frac{\partial N(\mathbf{r})}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.38)$$

L'analyse de la fonction de covariance est un sujet vaste et complexe. Des hypothèses simples sont faites pour fixer σ_{s_N} et d_{corr} à travers une application réelle dans le chapitre 7.

Solution par moindres carrés (développements simplifiés)

Afin de trouver la solution optimale, l'estimation en tant que telle consiste à minimiser :

$$\min \quad \hat{\mathbf{w}}^T \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{w}}\hat{\mathbf{w}}} \cdot \hat{\mathbf{w}} \quad (4.39)$$

avec le vecteur $\hat{\mathbf{w}}$, qui regroupe le signal corrélé aux positions d'observation $\hat{\mathbf{s}}$, le signal corrélé aux positions de prédiction $\hat{\mathbf{s}}^*$ ainsi que le bruit non corrélé aux positions d'observation $\hat{\mathbf{n}}$:

$$\hat{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{s}} \\ \hat{\mathbf{s}}^* \\ \hat{\mathbf{n}} \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

La matrice des cofacteurs $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{w}}\hat{\mathbf{w}}}$ est quant à elle formée par une matrice-bloc :

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{w}}\hat{\mathbf{w}}} = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{w}}\hat{\mathbf{w}}} = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{ss^*} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{s^*s} & \mathbf{K}_{s^*s^*} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{nn} \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

Équations d'observation

Il est possible de réarranger l'équation 4.30 :

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{l} = \mathbf{0} \quad (4.42)$$

Ainsi, chaque ligne du système peut être écrite comme suit, selon le type d'observation :

$$\begin{aligned}
 \hat{z}_0 + \hat{p}_x \cdot x_A + \hat{p}_y \cdot y_A + \hat{s}_i + \hat{n}_i - N_i &= 0 \\
 (\hat{p}_x \cdot x_B + \hat{p}_y \cdot y_B) - (\hat{p}_x \cdot x_A + \hat{p}_y \cdot y_A) + \hat{s}_i + \hat{n}_i - \Delta N_i &= 0 \\
 -\hat{p}_x + \hat{s}_i + \hat{n}_i - \eta_i &= 0 \\
 -\hat{p}_y + \hat{s}_i + \hat{n}_i - \xi_i &= 0
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

avec :

- x_A, y_A : coordonnées d'un point d'observation ;
- x_B, y_B : coordonnées du second point d'observation (uniquement pour ΔN) ;
- $\hat{z}_0, \hat{p}_x, \hat{p}_y$: paramètres du plan (déterministe) à estimer (selon l'équation 4.35).

Estimation finale

Les détails et développements de l'estimation des divers éléments généraux sont donnés à travers le support de cours « Éléments de géodésie » (GUILLAUME, 2024). Uniquement les points importants et formules finales sont présentés ci-dessous.

Le calcul des inconnues $\hat{\mathbf{x}}$ se fait de la manière suivante :

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{Q}_{vv}^{-1} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{Q}_{vv}^{-1} \cdot \mathbf{l}} \tag{4.44}$$

avec :

$$\mathbf{Q}_{vv} = \mathbf{Q}_{ss} + \mathbf{Q}_{nn} \tag{4.45}$$

et \mathbf{A} désignant la matrice des dérivées partielles (jacobienne) de $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$.

Le calcul de $\hat{\mathbf{s}}$, $\hat{\mathbf{s}}^*$ et $\hat{\mathbf{n}}$ se déroule explicitement comme suit :

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 \hat{\mathbf{s}} &= -\mathbf{Q}_{ss} \cdot \mathbf{k} \\
 \hat{\mathbf{s}}^* &= -\mathbf{Q}_{s^*s} \cdot \mathbf{k} \\
 \hat{\mathbf{n}} &= -\mathbf{Q}_{nn} \cdot \mathbf{k}
 \end{aligned}
 } \tag{4.46}$$

avec \mathbf{k} , le vecteur contenant les multiplicateurs de Lagrange :

$$\mathbf{k} = \mathbf{Q}_{vv}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}) \tag{4.47}$$

Le signal total des observations filtrées $\hat{\mathbf{z}}$ et des prédictions $\hat{\mathbf{z}}^*$ est finalement donné par :

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 \hat{\mathbf{z}} &= \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{s}} \\
 \hat{\mathbf{z}}^* &= \mathbf{f}^*(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{s}}^*
 \end{aligned}
 } \tag{4.48}$$

Indicateurs de précision

Afin d'évaluer la précision du filtrage des observations ou des prédictions, il convient de consi-

déterminer les vecteurs d'erreur ϵ suivants :

$$\begin{aligned}
 \epsilon_s &= \hat{S} - S \\
 \epsilon_{S^*} &= \hat{S}^* - S^* \\
 \epsilon_z &= \hat{Z} - Z \\
 \epsilon_{Z^*} &= \hat{Z}^* - Z^*
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

Les matrices des cofacteurs du signal total estimé \hat{Z} et \hat{Z}^* sont données par :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_{\epsilon_z \epsilon_z} &= \mathbf{Q}_{SS} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{Q}_{SS}^T + (\mathbf{H} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} (\mathbf{A}^T \mathbf{H}^T - \mathbf{A}^T) \\
 \mathbf{Q}_{\epsilon_{Z^*} \epsilon_{Z^*}} &= \mathbf{Q}_{S^*S^*} - \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{Q}_{S^*S^*}^T + (\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A}^*) \cdot \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{H}^{*T} - \mathbf{A}^{*T})
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H} &= \mathbf{Q}_{SS} - \mathbf{Q}_{VV}^{-1} \\
 \mathbf{H}^* &= \mathbf{Q}_{S^*S^*} - \mathbf{Q}_{VV}^{-1}
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

et :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} &= (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{Q}_{VV}^{-1} \cdot \mathbf{A})^{-1} \\
 \mathbf{Q}_{\hat{s}\hat{s}} &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{Q}_{SS}^T - \mathbf{H} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{H}^T \\
 \mathbf{Q}_{\hat{s}^*\hat{s}^*} &= \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{Q}_{S^*S^*}^T - \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{H}^{*T}
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

La précision d'un élément scalaire (p. ex. précision de l'erreur sur une cote du co-géoïde filtrée ou prédite) est simplement donnée par :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\epsilon_{z_i}} &= \sigma_0^2 \cdot \sqrt{q_{\epsilon_z \epsilon_z}(i,i)} \\
 \sigma_{\epsilon_{z_i}^*} &= \sigma_0^2 \cdot \sqrt{q_{\epsilon_{Z^*} \epsilon_{Z^*}}^*(i,i)}
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

avec $q_{\epsilon_z \epsilon_z}(i,i)$ et $q_{\epsilon_{Z^*} \epsilon_{Z^*}}^*(i,i)$, les termes diagonaux de $\mathbf{Q}_{\epsilon_z \epsilon_z}$ et $\mathbf{Q}_{\epsilon_{Z^*} \epsilon_{Z^*}}^*$.

Il est également possible d'extraire des informations de précision relative à partir des covariances contenues dans les matrices présentées ci-dessus.

Cependant, bien que ces écarts-types décrivent la précision des fonctionnelles du co-géoïde, ils demeurent fortement dépendants de la fonction de covariance choisie. De plus, rien ne permet de garantir que la précision du géoïde restauré, intégrant les effets du modèle de masse \mathcal{M} , corresponde à la même qualité finale.

Une analyse de précision plus approfondie est présentée au chapitre 5, consacré aux simulations en circuit fermé.

4.4.3 Restauration des effets des modèles (restore)

Une fois le co-géoïde déterminé par la méthode de la collocation, les fonctionnelles du champ de gravité sont simplement obtenues en restaurant la contribution de \mathcal{M} aux positions d'ob-

servation ou de prédiction :

$$\begin{aligned} \hat{N}(\mathbf{x}) &= \hat{N}_{\delta, \mathcal{M}}(\mathbf{x}) + N_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) \\ \hat{\eta}(\mathbf{x}_{\text{topo}}) &= \hat{\eta}_{\delta, \mathcal{M}}(\mathbf{x}_{\mathcal{G}}) + \eta_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_{\text{topo}}) \\ \hat{\xi}(\mathbf{x}_{\text{topo}}) &= \hat{\xi}_{\delta, \mathcal{M}}(\mathbf{x}_{\mathcal{G}}) + \xi_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_{\text{topo}}) \end{aligned} \tag{4.54}$$

avec :

- $\hat{N}_{\delta, \mathcal{M}}(\mathbf{x})$: signal total \hat{z} ou \hat{z}^* de la cote du co-géoïde ;
- $\hat{\eta}_{\delta, \mathcal{M}}(\mathbf{x}_{\mathcal{G}})$: signal total \hat{z} ou \hat{z}^* de la déviation de la verticale (est-ouest) sur le co-géoïde ;
- $\hat{\xi}_{\delta, \mathcal{M}}(\mathbf{x}_{\mathcal{G}})$: signal total \hat{z} ou \hat{z}^* de la déviation de la verticale (nord-sud) sur le co-géoïde.

Chapitre 5

Simulations en circuit fermé

Ce chapitre est un élément central du présent travail. Ces simulations permettent de prédire la précision à laquelle s'attendre sur certaines fonctionnelles du champ de gravité sans même réaliser de mesures sur le terrain. En d'autres termes, cela consiste à connaître la capacité d'un système de mesure à détecter des effets générés avec des données de référence « vraies ».

Deux types de simulateurs en rapport avec le champ de gravité local ont été développés :

- Simulateur associé aux fonctionnelles N et (η, ξ) à la surface de la topographie ;
- Simulateur associé à la correction orthométrique $E_{\mathcal{S}_{AB}}^{\text{corr}}$ le long d'un cheminement.

La figure 5.1 ci-dessous permet tout d'abord de clarifier la notion du modèle mixte de la Terre dans le cadre de ces simulations. Le principe général est de procéder à M réalisations de la Terre « vraie » δ_i (p. ex. $M = 100$) où, pour chacune d'elles, des masses fictives $\delta\mathcal{M}_i$ sont introduites.

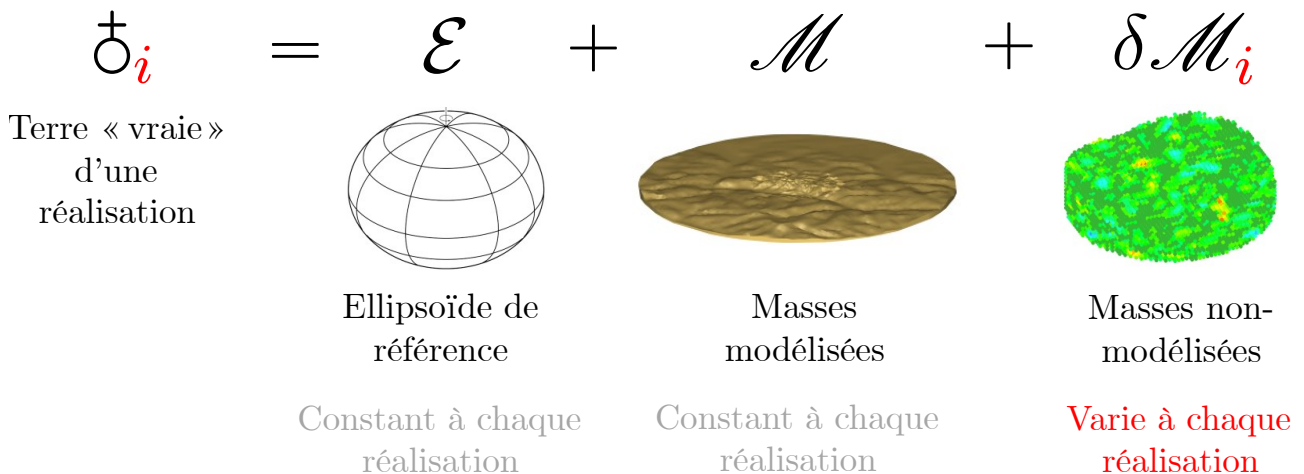


FIGURE 5.1 – Modèle mixte de la Terre pour chaque réalisation

Le processus générique complet est le suivant :

1. On définit un ellipsoïde de référence \mathcal{E} et des masses dites *modélisées* \mathcal{M} . Ces deux éléments resteront constants tout au long de la simulation.

2. Puis, pour chaque réalisation i (voir figure 5.2 qui accompagne les points i. à v.) :

- i. Une Terre vraie \mathfrak{t}_i est constituée comme étant la somme $\mathcal{E} + \mathcal{M} + \delta\mathcal{M}_i$ où $\delta\mathcal{M}_i$ est un ensemble de masses fictives, mais réalistes, dites *non-modélisées* (p. ex. contrastes de densités)
- ii. Les fonctionnelles vraies $\check{\mathcal{F}}$ et les observations vraies $\check{\mathcal{O}}$ sont déterminées à partir de la Terre vraie \mathfrak{t}_i .
- iii. Un bruit de mesure réaliste est introduit sur les observations vraies $\check{\mathcal{O}}$ afin de former un ensemble d'observations simulées \mathcal{O} .
- iv. Un processus de détermination complet des fonctionnelles estimées $\hat{\mathcal{F}}$ est effectué à partir des observations simulées \mathcal{O} et $\mathcal{E} + \mathcal{M}$. Cette opération s'effectue bel et bien sans $\delta\mathcal{M}_i$ puisque ces dernières sont considérées comme non-modélisées.
- v. Il reste ensuite à faire la différence entre les fonctionnelles vraies $\check{\mathcal{F}}$ et estimées $\hat{\mathcal{F}}$ pour cette réalisation i .

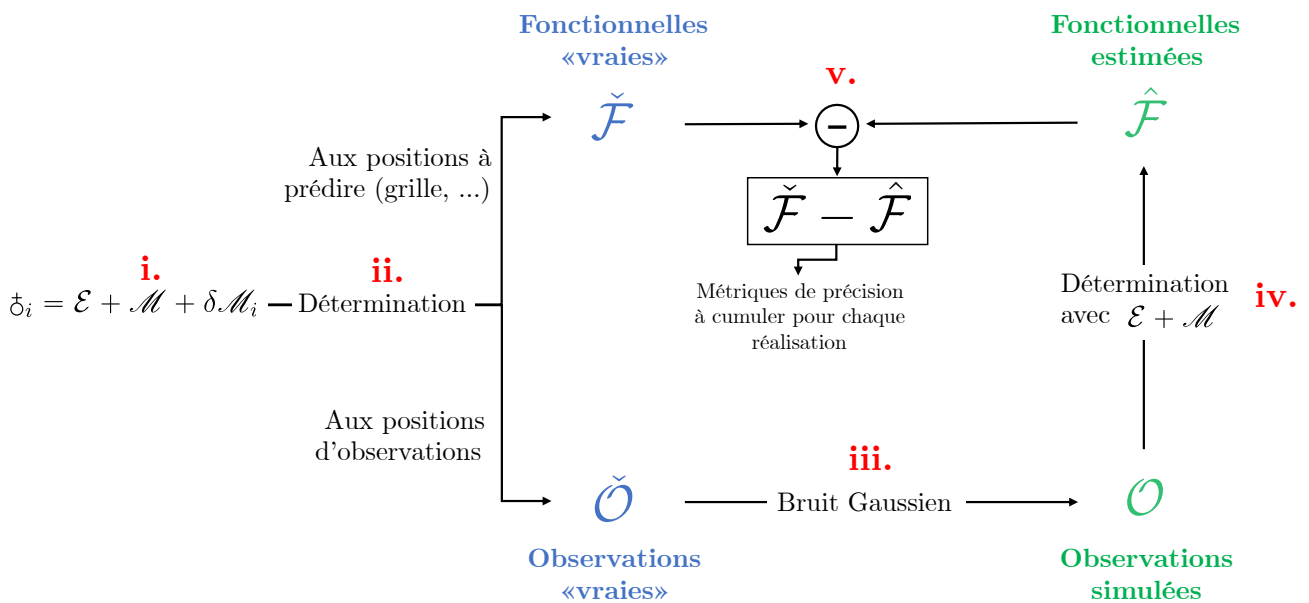


FIGURE 5.2 – Processus générique d'une réalisation

3. Pour terminer, des statistiques (p. ex. écart-type, moyenne ou RMS) sont réalisées en cumulant les différences $\check{\mathcal{F}} - \hat{\mathcal{F}}$ de chaque réalisation.

5.1 Génération des masses non-modélisées $\delta\mathcal{M}$

L'un des enjeux centraux de ces simulations en circuit fermé réside dans la génération des masses non-modélisées $\delta\mathcal{M}$. Il s'agit d'un ensemble de masses fictives qui ne sont pas considérées comme \mathcal{M} lors d'une détermination du champ de gravité classique (voir chapitre 4). Cependant, les effets générés par ces masses sont en théorie accessibles via les observations, d'où l'intérêt d'effectuer des simulations.

L'objectif de cette section est de formaliser la génération de M réalisations de contrastes de densités fictives des roches, mais géologiquement plausibles. Ceci a pour but de participer à la définition d'une Terre vraie δ_i à chaque réalisation d'une simulation (voir l'introduction du présent chapitre 5).

Deux principales solutions sont possibles :

- Ajout d'un ou plusieurs polyèdres homogènes possédant une densité $\delta\rho_{\text{poly}}$ inférieure ou supérieure à la densité de base des roches ρ_{topo} (voir figure 5.3) ;
- Ajout d'un ensemble de masses ponctuelles organisées qui possèdent chacune un volume donné (voxels) et une densité $\delta\rho_{\text{voxel}}$ inférieure ou supérieure à ρ_{topo} (voir figure 5.4).

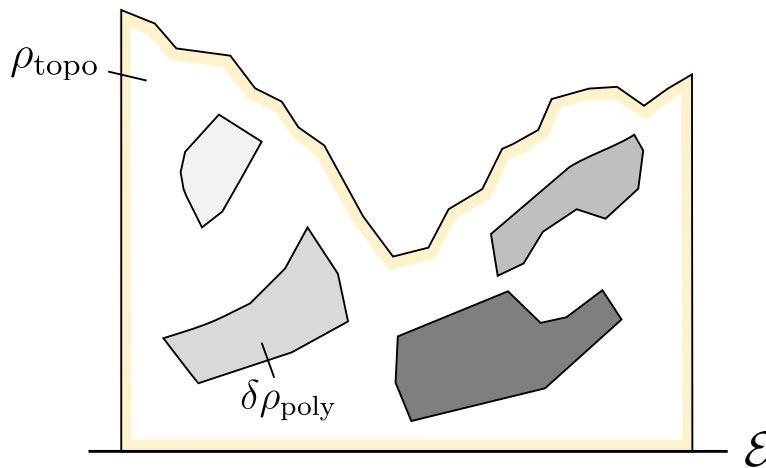


FIGURE 5.3 – Coupe : contrastes de densités par polyèdres homogènes

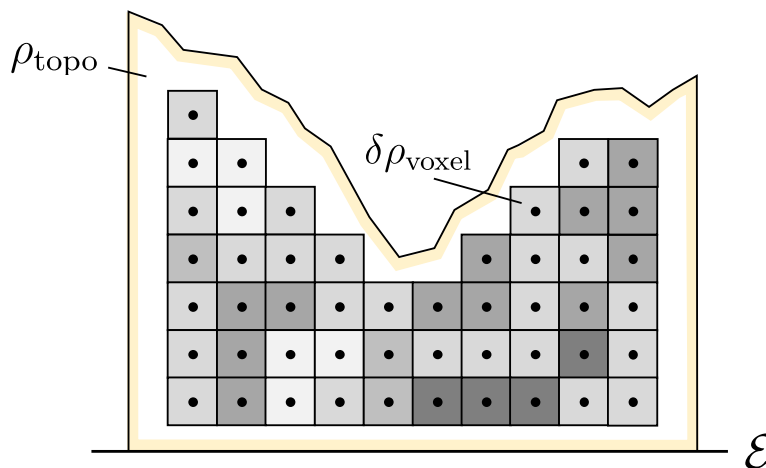


FIGURE 5.4 – Coupe : contrastes de densités par points massiques (voxels)

Dans la perspective d'automatiser un grand nombre de réalisations (par exemple $M = 100$ ou $M = 500$), l'utilisation de masses ponctuelles constitue une approche particulièrement adaptée. Elle permet de générer rapidement et de manière autonome des motifs géologiquement plausibles, ce qui serait beaucoup plus contraignant avec des polyèdres. De plus, cette méthode présente l'avantage d'offrir des performances largement supérieures pour le calcul des champs gravitationnels (voir section 2.4).

5.1.1 Centres de voxels

On considère un maillage fermé $\mathcal{M}_{\text{topo}}$ représentant la topographie. L'objectif est de construire un ensemble de centres de voxels :

$$\mathbf{v}_i = (x_i \ y_i \ z_i) \quad (5.1)$$

situés à l'intérieur de $\mathcal{M}_{\text{topo}}$.

La génération des centres de voxels s'apparente tout d'abord à la création d'une grille régulière 3D dont les bornes sont la boîte englobante de $\mathcal{M}_{\text{topo}}$:

$$\begin{aligned} x_{\min} &= \min_{\mathcal{M}_{\text{topo}}} x & x_{\max} &= \max_{\mathcal{M}_{\text{topo}}} x \\ y_{\min} &= \min_{\mathcal{M}_{\text{topo}}} y & y_{\max} &= \max_{\mathcal{M}_{\text{topo}}} y \\ z_{\min} &= \min_{\mathcal{M}_{\text{topo}}} z & z_{\max} &= \max_{\mathcal{M}_{\text{topo}}} z \end{aligned} \quad (5.2)$$

À partir d'un pas de longueur h (p. ex. $h = 100\text{m}$), les centres de voxels sont placés aux milieux des intervalles dans chaque direction :

$$\begin{aligned} x_i &= x_{\min} + \frac{h}{2} + i \cdot h \\ y_i &= y_{\min} + \frac{h}{2} + i \cdot h \\ z_i &= z_{\min} + \frac{h}{2} + i \cdot h \end{aligned} \quad (5.3)$$

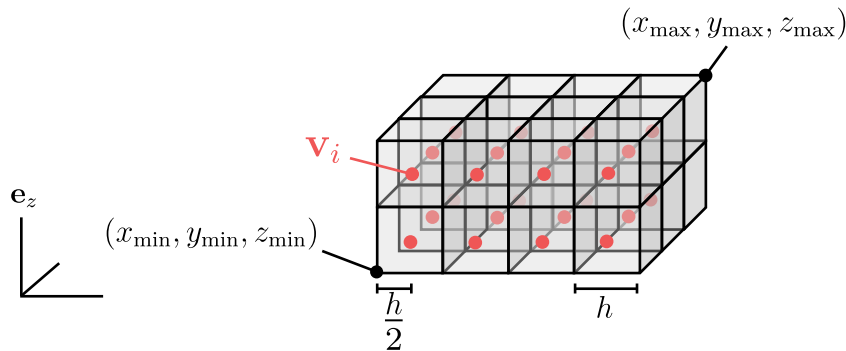


FIGURE 5.5 – Création d'une grille régulière 3D

Afin d'éviter la génération d'un nombre excessif de voxels sans grande utilité, la grille tridimen-

sionnelle est restreinte à une région circulaire horizontale de centre (c_x, c_y) et de rayon R . Seuls les voxels dont la projection horizontale appartient à ce disque sont conservés, ce qui impose la condition :

$$(x_i - c_x)^2 + (y_j - c_y)^2 \leq R^2 \quad (5.4)$$

À présent, il reste encore à supprimer les centres de voxels \mathbf{v}_i se situant à l'extérieur et proches des bords $\partial\mathcal{M}_{\text{topo}}$ du polyèdre de la topographie. Considérons la fonction de distance signée SDF¹ entre un point \mathbf{v}_i et le maillage $\mathcal{M}_{\text{topo}}$:

$$\begin{aligned} \text{SDF}(\mathbf{v}_i, \mathcal{M}_{\text{topo}}) < 0 : & \quad \text{à l'intérieur de } \mathcal{M}_{\text{topo}} \\ \text{SDF}(\mathbf{v}_i, \mathcal{M}_{\text{topo}}) = 0 : & \quad \text{sur } \partial\mathcal{M}_{\text{topo}} \\ \text{SDF}(\mathbf{v}_i, \mathcal{M}_{\text{topo}}) > 0 : & \quad \text{à l'extérieur de } \mathcal{M}_{\text{topo}} \end{aligned} \quad (5.5)$$

De plus, il est indispensable de prévoir une marge a qui permet d'éviter deux conséquences importantes :

- Si un voxel est trop proche d'un point d'observation sur la topographie ou sur l'ellipsoïde \mathcal{E} , cela générera des biais non négligeables. En effet, la nature ponctuelle d'une telle masse représente un volume de roche important à proximité très directe ;
- Si l'emprise d'un voxel déborde à l'extérieur de la topographie, alors la masse associée n'est plus réaliste.

Ainsi, la condition finale de conservation est la suivante :

$$\text{SDF}(\mathbf{v}_i, \mathcal{M}_{\text{topo}}) < -a \quad (5.6)$$

où $a \geq \sqrt{3} \cdot h$ afin qu'aucune emprise ne dépasse de la topographie (voir figure 5.6).

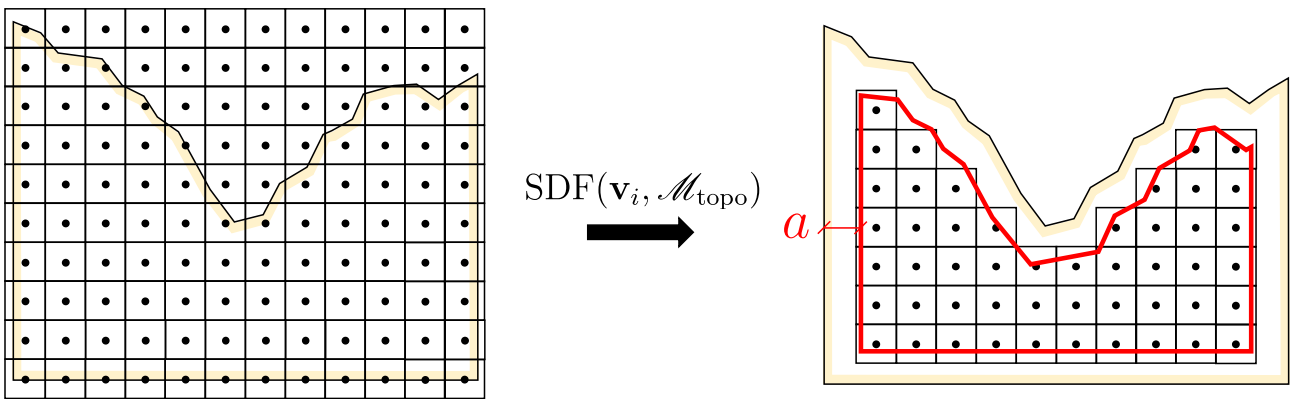


FIGURE 5.6 – Coupe : visualisation de la fonction de distance signée SDF

Finalement, chaque point \mathbf{v}_i correspond à un centre de voxel de volume h^3 .

1. Cette fonction peut être retrouvée dans la librairie `open3d.signed_distance`

5.1.2 Génération des contrastes de densité $\delta\rho_i$

Grâce au volume h^3 , il est désormais possible d'appliquer un contraste de densité $\delta\rho_i$ pour chaque voxel afin d'obtenir une masse δm_i par :

$$\delta m_i = h^3 \cdot \delta\rho_i \quad [\text{kg}] \quad (5.7)$$

L'attribution des valeurs $\delta\rho_i$ constitue la problématique centrale de cette section (voir figure 5.7).

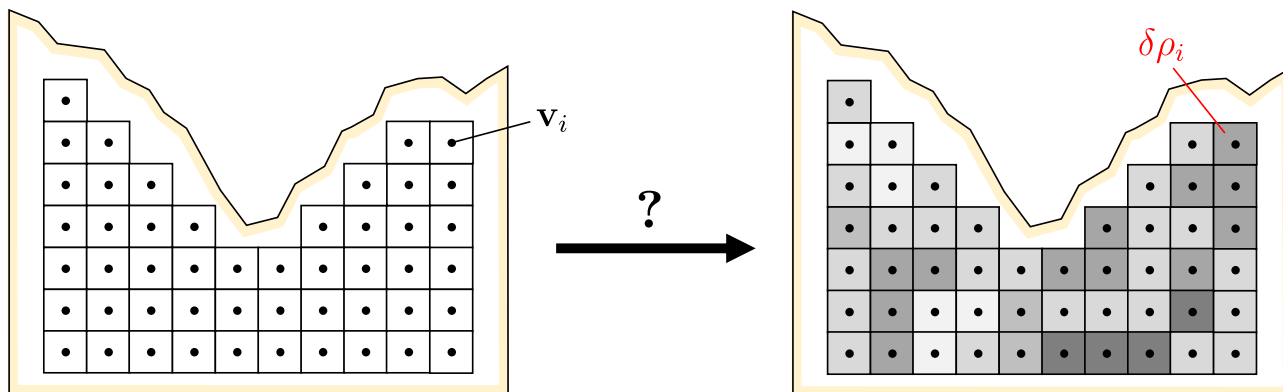


FIGURE 5.7 – Problématique générale de l'attribution des contrastes de densités $\delta\rho_i$

Une définition manuelle et exhaustive de ces contrastes de densité serait impossible compte tenu du nombre de points et de réalisations à traiter. C'est pourquoi une solution automatisée pseudo-aléatoire est envisagée.

Notion de génération procédurale

Naïvement, la toute première solution automatique à laquelle on peut penser est une simple répartition aléatoire, comme un bruit blanc. Cette méthode ne génère cependant aucune cohérence spatiale qui puisse s'apparenter à un quelconque motif.

Une autre solution serait d'utiliser un algorithme de génération procédurale. En effet, cette approche offre un moyen efficace de produire des répartitions spatialement corrélées (WIKIPÉDIA CONTRIBUTORS, 2025). La génération procédurale est un ensemble de méthodes permettant d'automatiser la création de structures ou de motifs continus et cohérents sans avoir à fournir une description explicite et exhaustive. De tels algorithmes sont régulièrement implémentés dans les jeux vidéo, par exemple pour la génération aléatoire d'un monde Minecraft (DAWNOSAUR, 2025). Cette méthode est donc basée sur des processus pseudo-aléatoires, mais est reproductible en donnant la graine utilisée. La figure 5.8 permet de faire la distinction entre un bruit blanc et une génération procédurale.

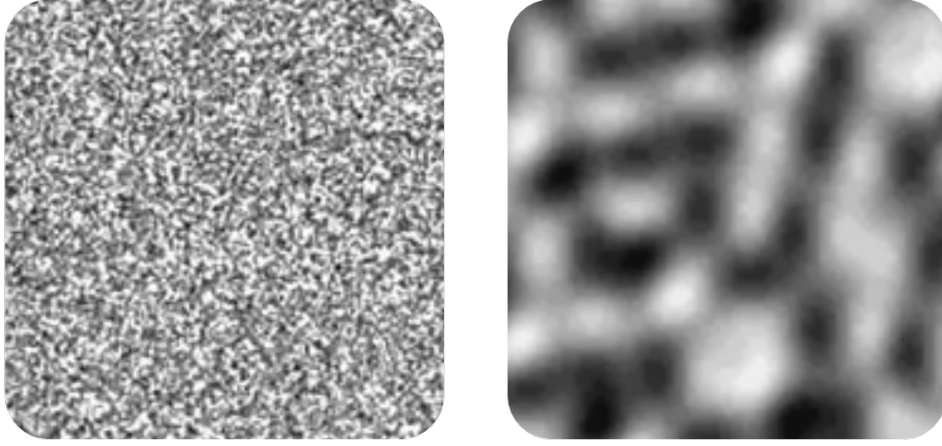


FIGURE 5.8 – Distinction entre un bruit blanc (à gauche) et une génération procédurale (à droite). Source : DAWNOSAUR, 2025.

Bruit de Perlin 3D

Le bruit de Perlin est une fonction pseudo-aléatoire continue introduite par PERLIN (1985) pour générer des motifs naturels présentant une variation progressive dans l'espace. Contrairement au bruit blanc, il n'est pas constitué de valeurs indépendantes : il produit des champs lisses où les fluctuations locales sont corrélées, ce qui le rend particulièrement adapté pour simuler des structures géologiques cohérentes (OAKLEY et al., 2025). Bien que la littérature à ce sujet soit réduite, un avis d'une géologue du *Service géologique national* suisse a pu confirmer la plausibilité des motifs à être associés à des contrastes de densités des roches. Il est toutefois nécessaire de prendre en compte plusieurs paramètres d'entrées à la génération du bruit de Perlin en trois dimensions (TOUTI, 2025).

Modèle mathématique

Les paramètres sont les suivants :

- L_x, L_y, L_z : longueurs de corrélation caractéristiques selon x, y, z [m] ;
- N_{oct} : nombre d'octaves du bruit brownien fractal (fBm) ;
- p : persistance, c'est-à-dire le rapport d'amplitude entre deux octaves successives ;
- $\sigma_{\delta\rho}$: écart-type cible des contrastes de densité (par exemple $\sigma_{\delta\rho} \approx 150$ à $200 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$).

Les développements ci-dessous sont illustrés à l'aide d'un même exemple, vue en projection du dessus, tout au long de la section.

1. Normalisation des coordonnées selon les longueurs de corrélation

Les longueurs de corrélation (L_x, L_y, L_z) sont utilisées pour définir des coordonnées dans l'espace du bruit de Perlin \mathbb{U}^3 . Pour chaque voxel $\mathbf{v}_i^{\mathbb{R}^3} = (x_i, y_i, z_i)$, on introduit :

$$\mathbf{v}_i^{\mathbb{U}^3} = \left(\frac{x_i}{L_x}, \frac{y_i}{L_y}, \frac{z_i}{L_z} \right) \quad (5.8)$$

De cette façon, la taille typique des motifs générés est contrôlée par L_x, L_y, L_z : une valeur plus grande de L_x (respectivement L_y, L_z) entraîne des variations plus lentes selon x (respectivement y, z). La figure 5.9 présente un exemple du passage de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{U}^3$.

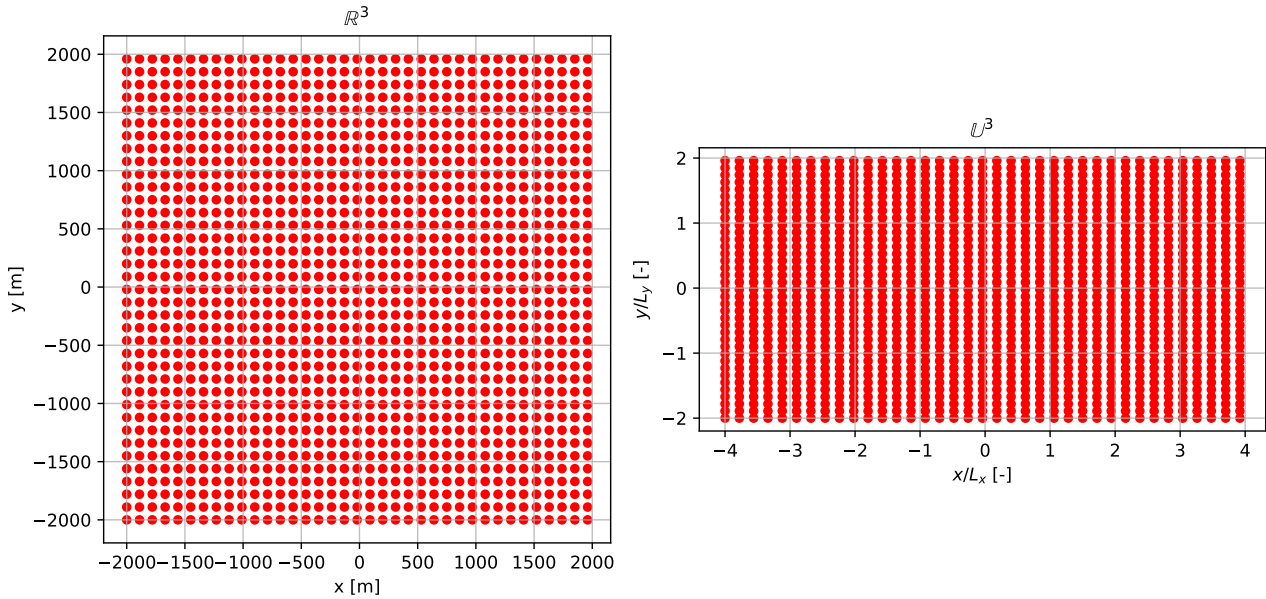


FIGURE 5.9 – Passage des points $\mathbf{v}_i^{\mathbb{R}^3} \rightarrow \mathbf{v}_i^{\mathbb{U}^3}$ avec $L_x = 500$ et $L_y = 1000$ [m]. Vue en projection du dessus.

2. Génération pseudo-aléatoire de vecteurs-gradients unitaires

Dans l'espace normalisé \mathbb{U}^3 défini par les longueurs de corrélation, le bruit de Perlin repose sur une grille régulière unitaire. À chaque sommet entier de cette grille, c'est-à-dire à chaque point (i, j, k) , un vecteur-gradient $\mathbf{t}_{i,j,k}$ est associé (voir figure 5.10).

En réalité, ces gradients ne sont pas stockés ni générés explicitement : ils sont obtenus de manière pseudo-aléatoire à partir d'une table de permutation et d'un hachage des indices i, j, k (PERLIN, 1985). Chaque $\mathbf{t}_{i,j,k}$ est choisi dans un ensemble fini de directions unitaires en 3D.

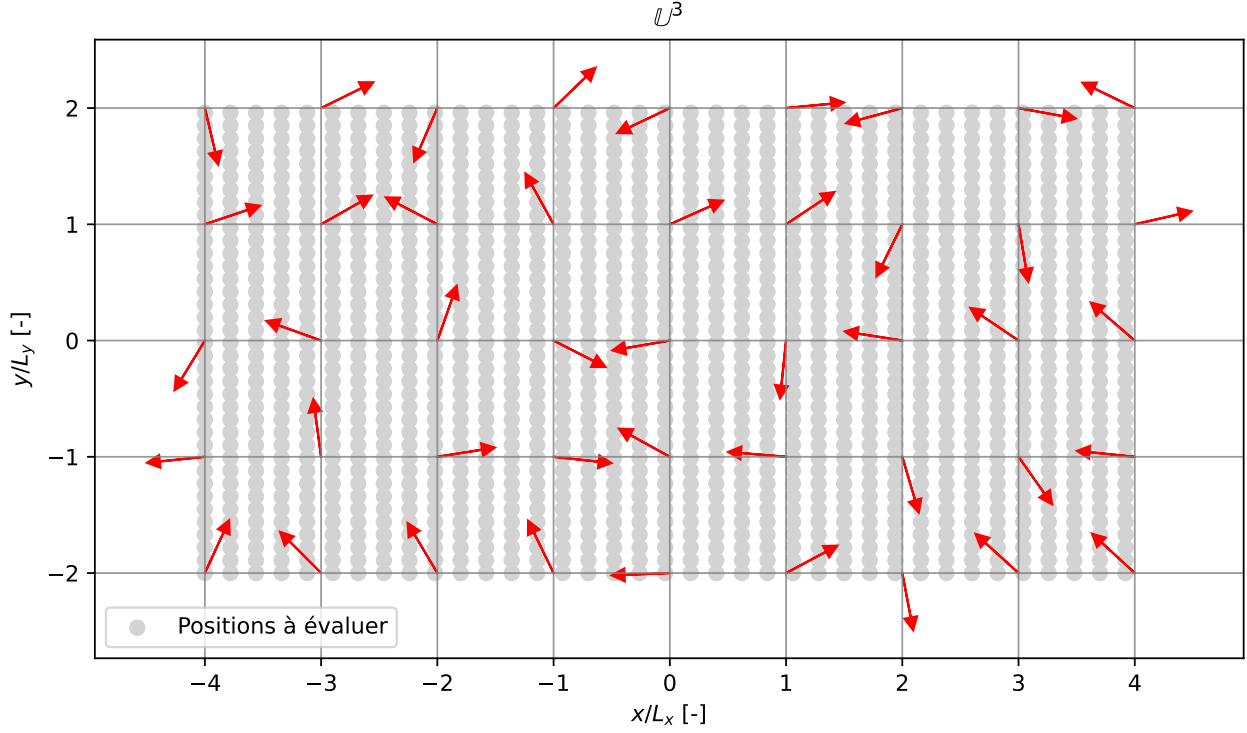


FIGURE 5.10 – Génération pseudo-aléatoire des vecteurs-gradients $\mathbf{t}_{i,j,k}$ aux sommets entiers (i, j, k) de la grille unitaire de \mathbb{U}^3 . Vue en projection du dessus.

3. Interpolation déterministe

Pour tout point à évaluer $\mathbf{v}_i^{\mathbb{U}^3}$ on commence par identifier le cube unitaire de \mathbb{U}^3 auquel il appartient, défini par :

$$(i, j, k) \quad (i + 1, j, k) \quad (i, j + 1, k) \quad (i + 1, j + 1, k) \quad \dots \quad (5.9)$$

soit les huit sommets formant le voisinage direct de $\mathbf{v}_i^{\mathbb{U}^3}$.

Pour chacun de ces sommets on construit un vecteur de décalage :

$$\mathbf{d}_{i,j,k} = \mathbf{v}_i^{\mathbb{U}^3} - (i \ j \ k)^T \quad (5.10)$$

puis on calcule le produit scalaire local :

$$s_{i,j,k} = \mathbf{t}_{i,j,k} \cdot \mathbf{d}_{i,j,k} \quad (5.11)$$

La valeur du bruit de Perlin en $\mathbf{v}_i^{\mathbb{U}^3}$ est ensuite obtenue par une interpolation trilinéaire lissée des huit valeurs $s_{i,j,k}$ à l'aide du polynôme suivant (TOUTI, 2025), également présenté dans la figure 5.11 :

$$f(a) = 6a^5 - 15a^4 + 10a^3 \quad (5.12)$$

où a désigne la distance entre $\mathbf{v}_i^{\mathbb{U}^3}$ et un sommet (i, j, k) selon un axe donné. L'interpolation est

effectuée successivement selon les trois axes, ce qui garantit une continuité du champ obtenu.

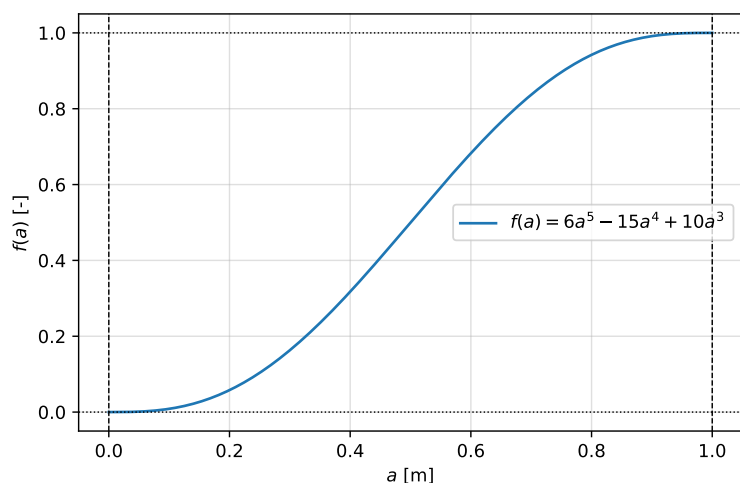


FIGURE 5.11 – Polynôme de lissage utilisé en pratique dans l’interpolation du bruit de Perlin.

Ainsi, le bruit de Perlin simple est un champ scalaire défini dans l’intervalle $[-1, 1]$, appelé $\mathcal{N}(x, y, z)$.

La figure 5.12 ci-dessous présente un exemple où l’on peut clairement constater que les zones dont le bruit s’approche de 1 sont les intersections, ou superpositions des vecteurs-gradients.

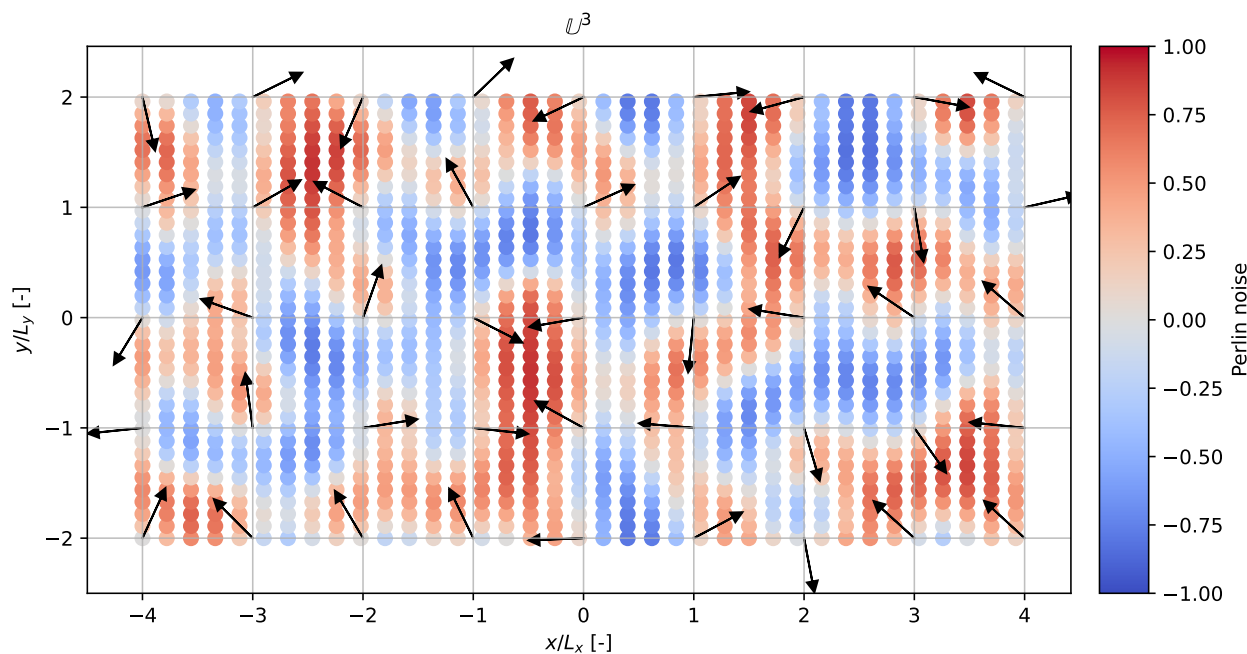


FIGURE 5.12 – Interpolation déterministe du bruit de Perlin \mathcal{N} dans \mathbb{U}^3 à partir des vecteurs-gradients pseudo-aléatoires. Vue en projection du dessus.

4. Retour de \mathbb{U}^3 vers \mathbb{R}^3

Après avoir généré le champ scalaire du bruit de Perlin dans l’espace \mathbb{U}^3 , il est simplement

nécessaire de repasser vers l'espace \mathbb{R}^3 et ainsi démontrer l'impact des longueurs de corrélation (voir figure 5.13).

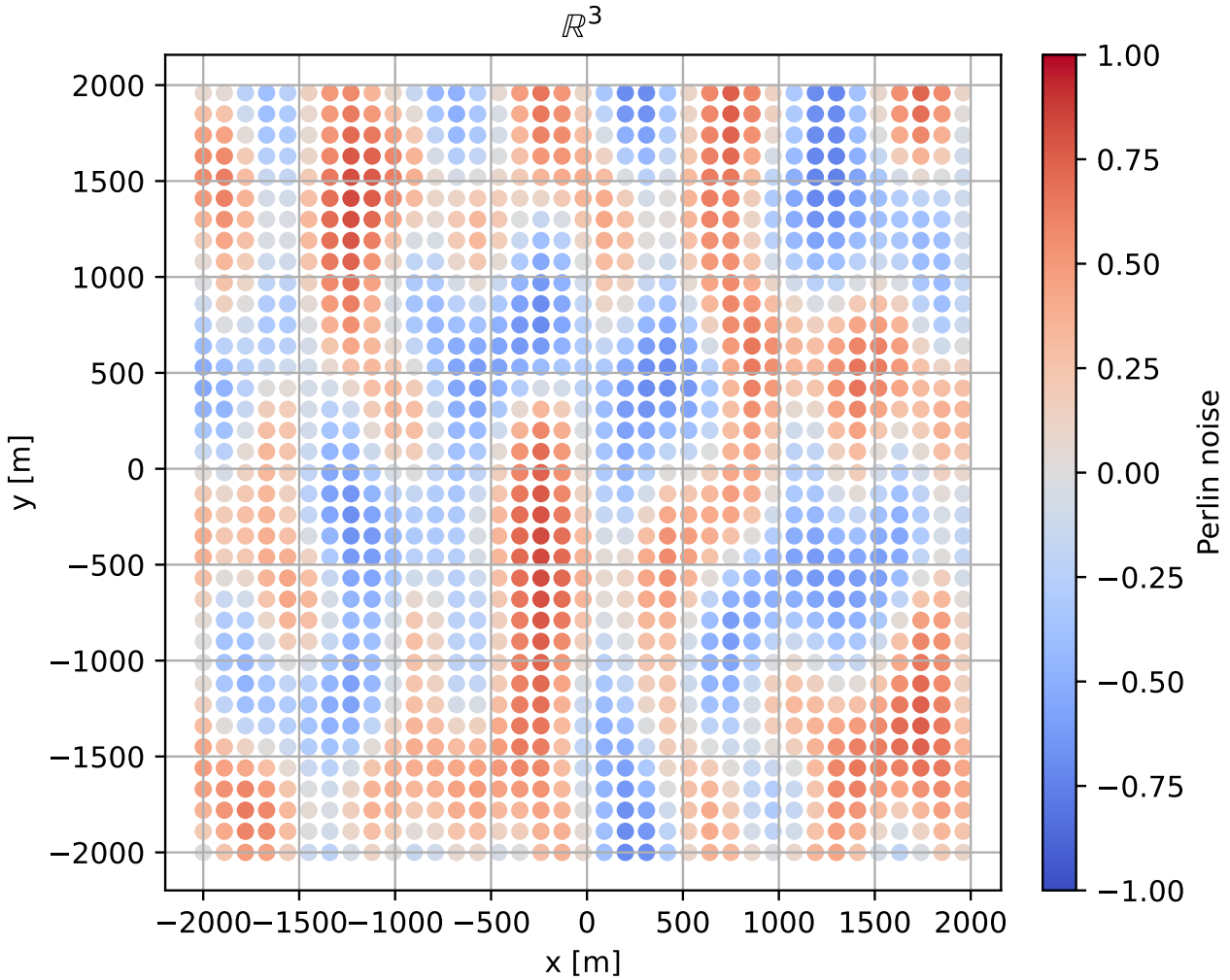
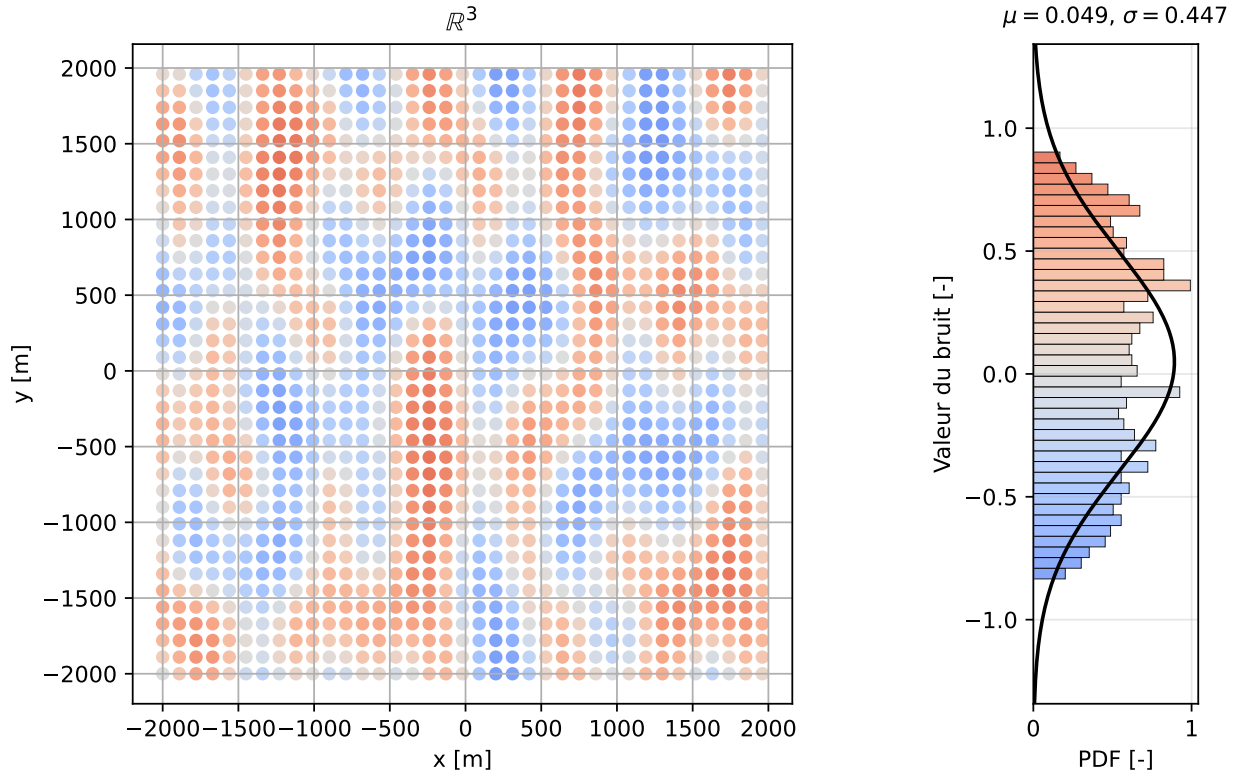


FIGURE 5.13 – Passage de \mathbb{U}^3 vers \mathbb{R}^3 démontrant l'impact des longueurs de corrélations L_x, L_y, L_z . Vue en projection du dessus.

5. Transformation en loi normale

Pour rappel, il est souhaitable que les contrastes de densité générés reproduisent une variabilité compatible avec les distributions observées dans les roches. À cette fin, un bruit de Perlin (borné dans $[-1, 1]$) doit être converti en un nouveau champ dont la dispersion se rapproche d'un écart-type cible $\sigma_{\delta\rho}$, cohérent avec les contrastes de densité attendus dans le sous-sol.

Comme il est possible de le constater dans la figure 5.14, la répartition du bruit de Perlin simple ne suit pas une loi Gaussienne.


 FIGURE 5.14 – Bruit de Perlin simple \mathcal{N} et sa fonction de densité de probabilité (PDF)

Cependant, selon le théorème central limite, si l'on cumule suffisamment de réalisations de ce bruit de Perlin simple, alors la distribution obtenue tend vers une loi Gaussienne (TOUTI, 2025). Afin de réaliser cela, la notion d'*octaves* et de *persistance* est introduite.

Le principe consiste à sommer plusieurs bruits de Perlin indépendants, chacun défini à une échelle spatiale différente. Pour N_{oct} octaves, le champ est construit comme :

$$\mathcal{N}_{\text{fBm}}(x, y, z) = \sum_{k=0}^{N_{\text{oct}}-1} p^k \cdot \mathcal{N}(2^k \cdot x, 2^k \cdot y, 2^k \cdot z) \quad (5.13)$$

où :

- \mathcal{N}_{fBm} : désigne la somme multi-échelles résultante, appelée *bruit Brownien fractal*, qui combine les contributions de toutes les octaves ;
- k : indice des octaves ;
- 2^k : multiplicateur de la fréquence spatiale, rendant les motifs plus fins ;
- p^k : persistance, contrôlant l'amplitude des octaves successives.

Pour N_{oct} suffisamment grand (p. ex. $N_{\text{oct}} = 8$) et $0 < p < 1$ (p. ex. $p = 0.5$), la somme tend vers une distribution approchant une loi normale, conformément au théorème central limite (voir figure 5.15).

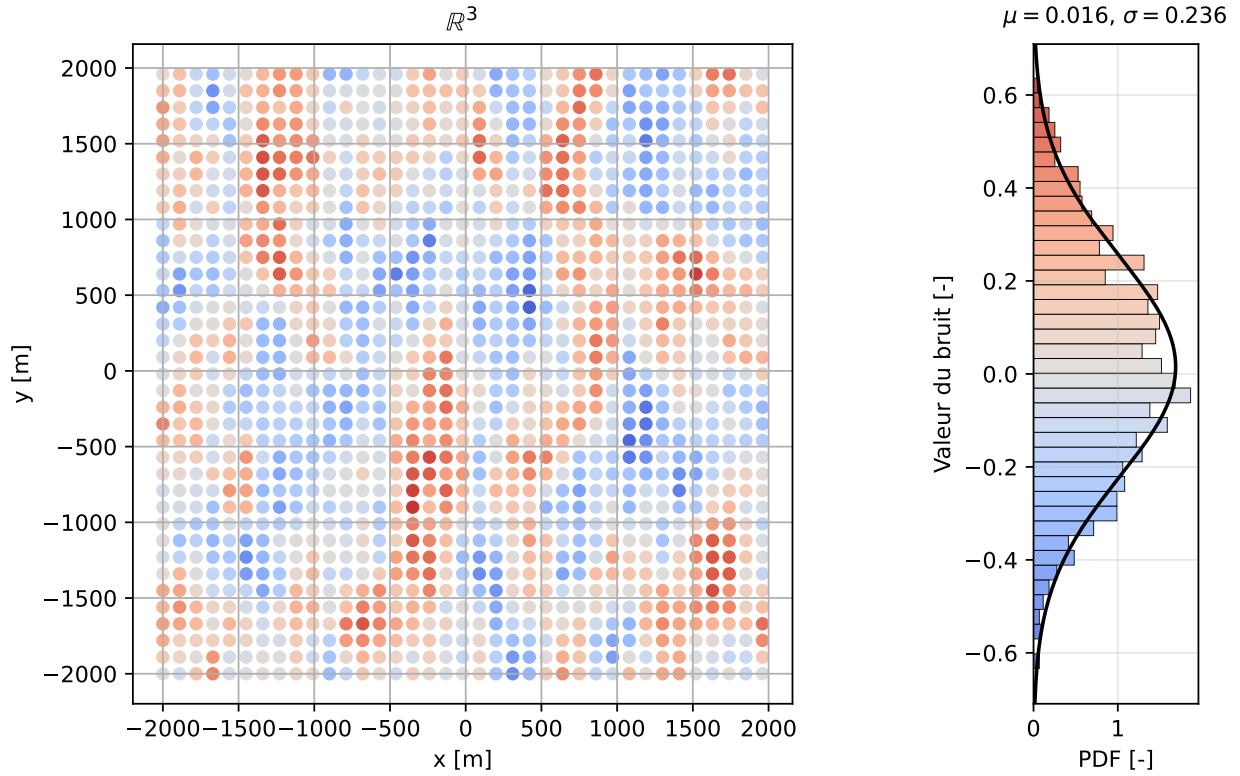


FIGURE 5.15 – Bruit de Perlin \mathcal{N}_{fBm} avec $N_{\text{oct}} = 8$, $p = 0.5$ et sa fonction de densité de probabilité (PDF)

Le champ \mathcal{N}_{fBm} obtenu doit ensuite être normalisé pour reproduire l'écart-type cible $\sigma_{\delta\rho}$ attendu dans le milieu géologique. On applique pour cela une normalisation :

$$\delta\rho_i = \sigma_{\delta\rho} \cdot \frac{\mathcal{N}_{\text{fBm}}(x_i, y_i, z_i)}{\text{std}(\mathcal{N}_{\text{fBm}})} \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}] \quad (5.14)$$

Le champ final vérifie alors :

$$\text{E}[\delta\rho_i] = 0 \quad \text{std}(\delta\rho_i) = \sigma_{\delta\rho} \quad (5.15)$$

tout en conservant la structure spatiale corrélée issue du bruit de Perlin et le caractère quasi-gaussien garanti par la somme multi-échelles des octaves (voir figure 5.16).

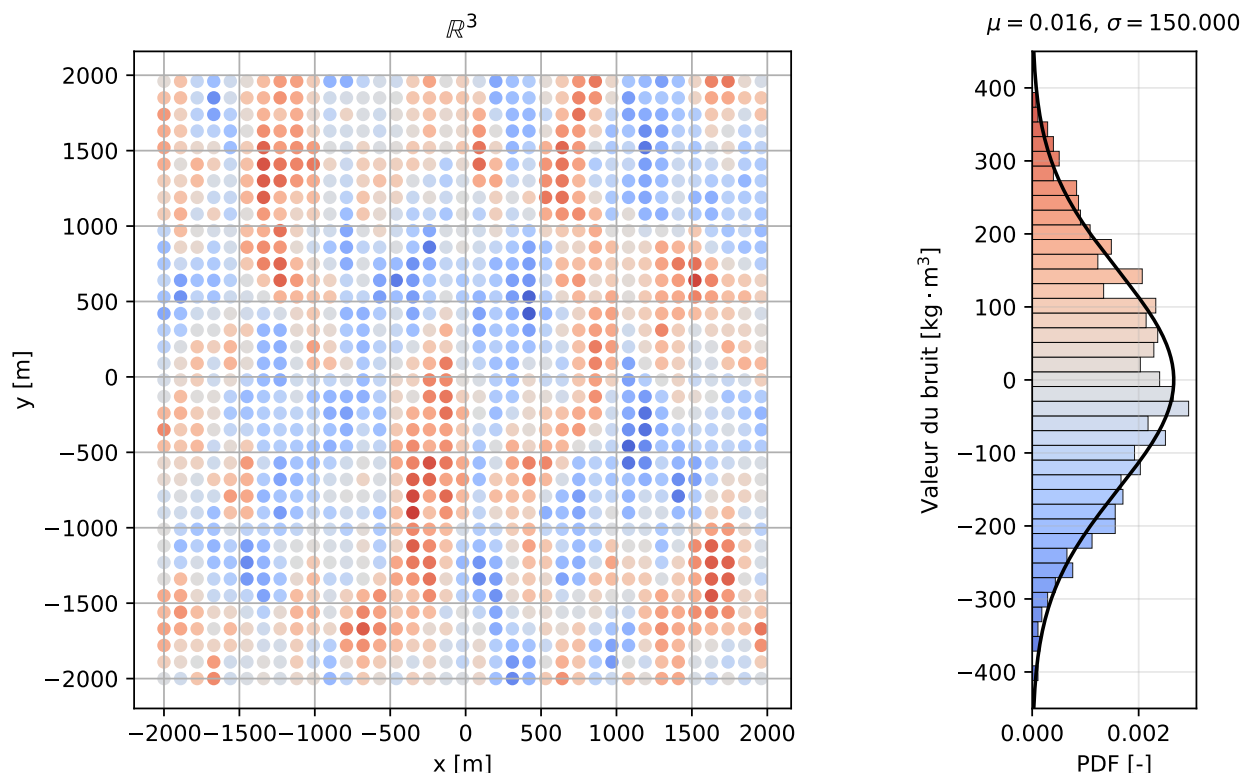


FIGURE 5.16 – Bruit de Perlin \mathcal{N}_{fBm} avec $\sigma_{\delta\rho} = 150$, $N_{\text{oct}} = 8$, $p = 0.5$ et sa fonction de densité de probabilité (PDF)

Considérations géologiques dans le choix des paramètres

Le premier paramètre est l'écart-type de la densité des roches $\sigma_{\delta\rho}$. Celui-ci est assez générique et peut être fixé à environ 150 ou 200 $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ (CHAPELIER et MARI, 2000). Cette donnée est soumise à des spécificités locales évidentes mais il s'agit là d'une bonne approximation. La figure 5.17 présente quelques intervalles des principaux types de roches. Les roches dures d'un massif montagneux comme les Alpes s'apparentent surtout à un mélange des 4 catégories les plus denses ci-dessous, d'où l'approximation $\sigma_{\delta\rho} \in [150, 200] \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

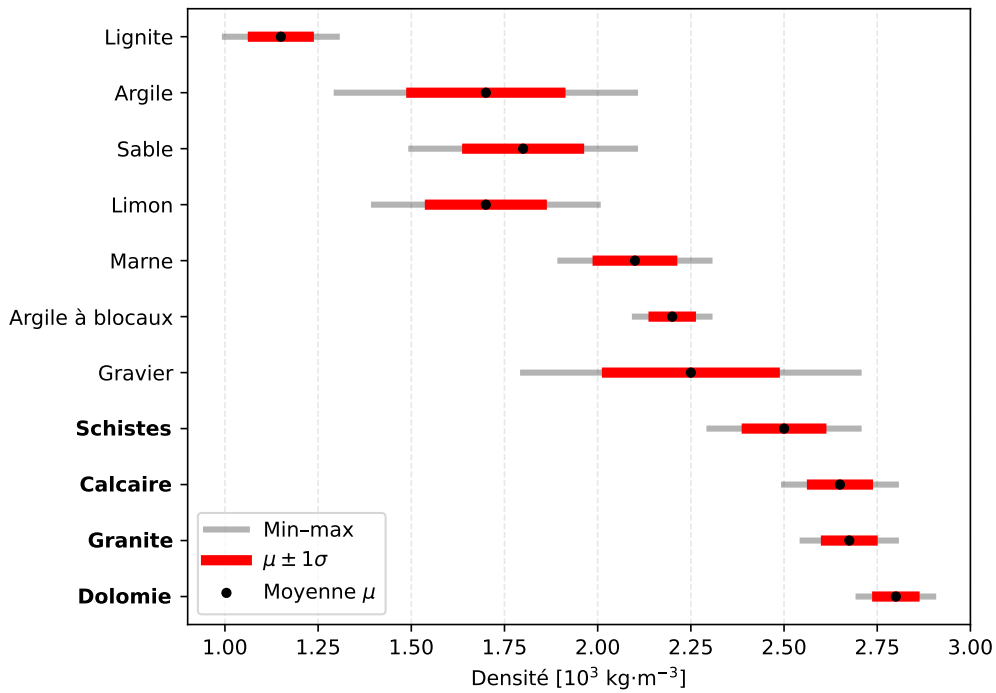


FIGURE 5.17 – Densités apparentes des principaux types de roches. Source des données de base : CHAPELIER et MARI, 2000.

Ensuite, les longueurs de corrélations L_x, L_y, L_z sont aussi un élément crucial. De façon générale, les contrastes de densités dans les roches dures apparaissent plus souvent « aplatis » que redressés à la verticale, ce qui implique de choisir un paramètre $L_z < (L_x, L_y)$ comme indiqué dans la figure 5.18. Cependant, selon les régions et les coupes géologiques à disposition, seul un avis d'expert pourra déterminer des longueurs de corrélations plausibles. À première vue, l'exemple donné en bas à droite de la figure ci-dessous semble le plus plausible pour un bruit de Perlin générique.

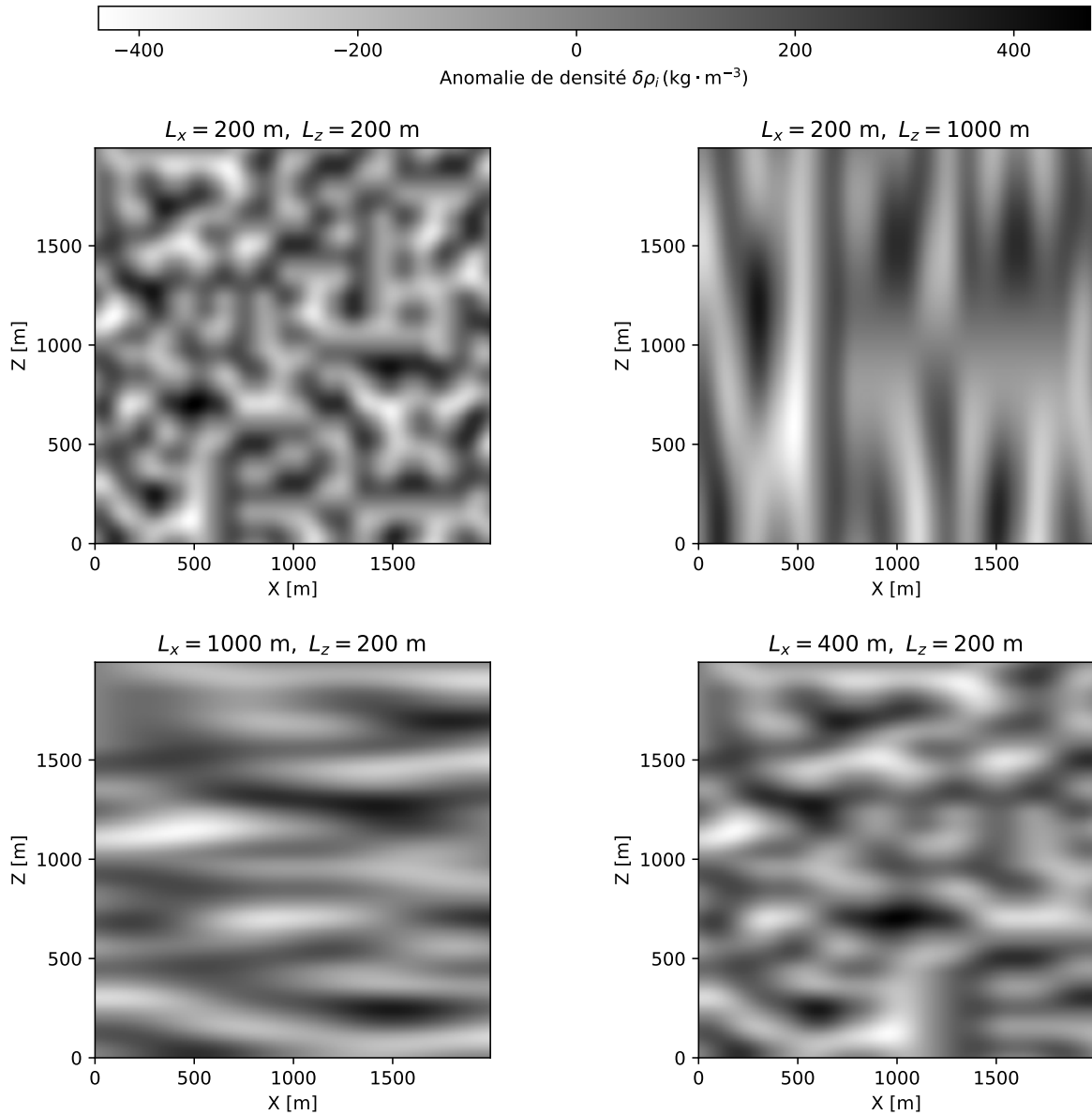
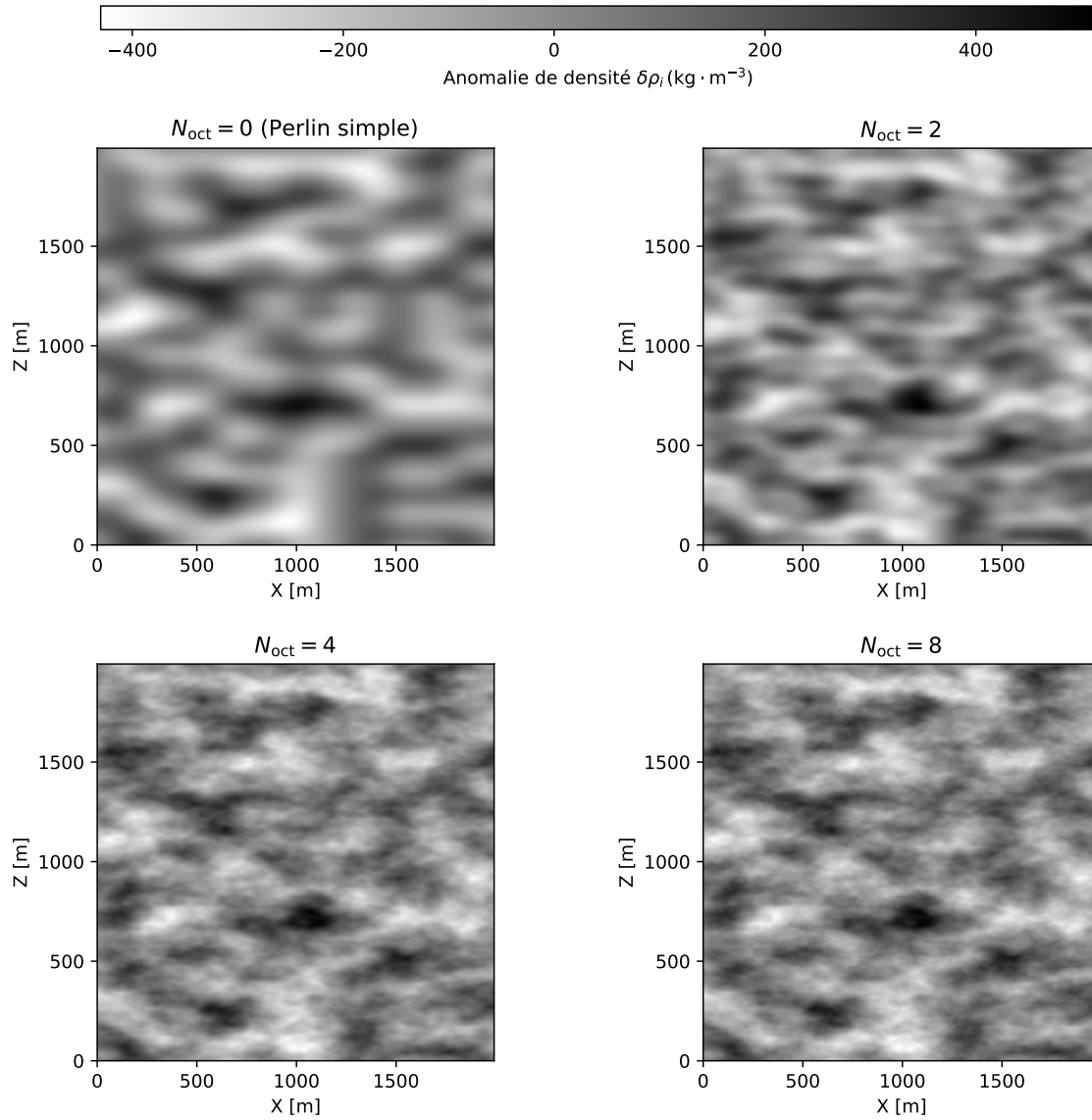


FIGURE 5.18 – Vue en coupe : bruit de Perlin avec différentes longueurs de corrélation

Pour terminer, le nombre d'octaves N_{oct} et la persistance p ne sont pas des paramètres très pertinents à faire varier. En effet, il est préférable de choisir $N_{\text{oct}} = 8$ et $p = 0.5$ par défaut afin d'obtenir un bon compromis et une répartition totale du bruit suffisamment proche d'une loi normale. Un aperçu de la variation de N_{oct} est donné dans la figure 5.19.


 FIGURE 5.19 – Vue en coupe : bruit de Perlin avec différents N_{oct} et $p = 0.5$

Exemple complet de génération

La figure 5.20 ci-dessous présente deux exemples de réalisation complète du processus de génération de masses non modélisées $\delta\mathcal{M}_i$. Les paramètres du tableau 5.1 ont été utilisés.

Paramètre	Description	Valeur	Unité
h	Côté d'un voxel	100	m
R	Rayon de la génération	5 000	m
c_x, c_y	Centre de la génération	2 599 825, 1 132 875	m
L_x, L_y, L_z	Longueurs de corrélation	700, 700, 300	m
$\sigma_{\delta\rho}$	Écart-type de la densité	150	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
N_{oct}, p	Octaves et persistance	8, 0.5	–

TABLEAU 5.1 – Paramètres utilisés pour la génération du bruit de Perlin de la figure 5.20

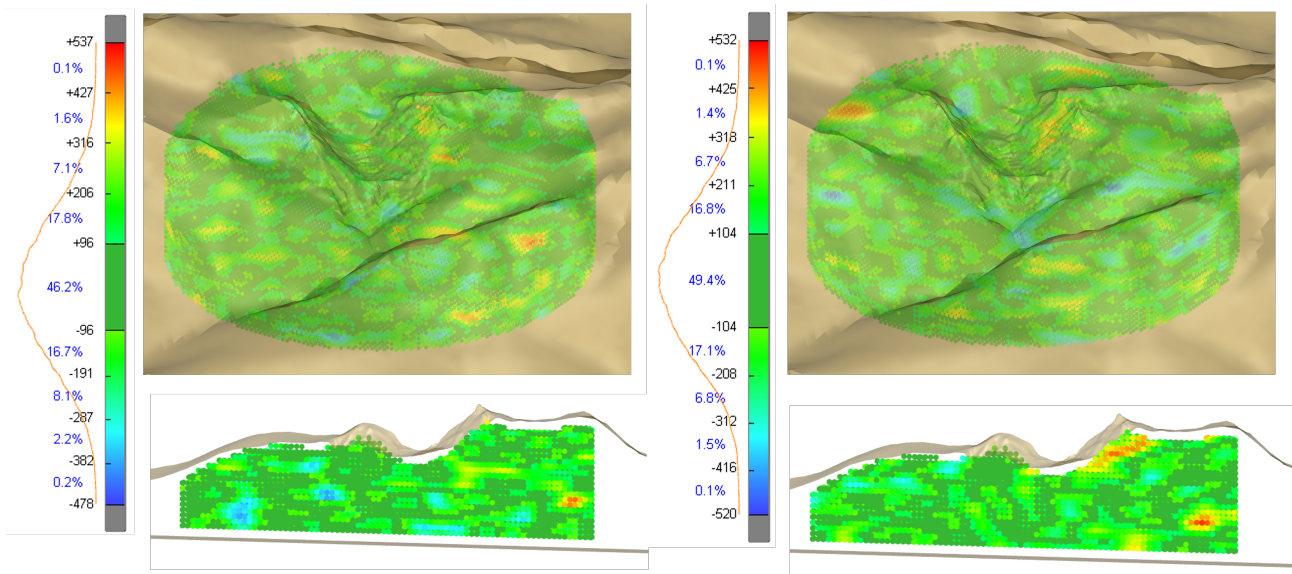


FIGURE 5.20 – Deux réalisations de $\delta\mathcal{M}_i$ avec leurs distributions de contrastes de densités $\delta\rho_i$ ainsi qu'une coupe

5.2 Simulateur associé à N, η, ξ

Ce simulateur consiste à pouvoir qualifier une détermination du champ de gravité local exposée au précédent chapitre 4. Il est donc question ici des fonctionnelles $N(\mathbf{x}^{\text{pred}})$, $\eta(\mathbf{x}_{\text{topo}}^{\text{pred}})$, $\xi(\mathbf{x}_{\text{topo}}^{\text{pred}})$. La figure 5.2 de l'introduction du présent chapitre 5 est détaillée pour ce type de simulation dans la figure 5.21 ci-dessous. De plus, un même exemple est présenté tout au long de la section afin d'illustrer les points principaux.

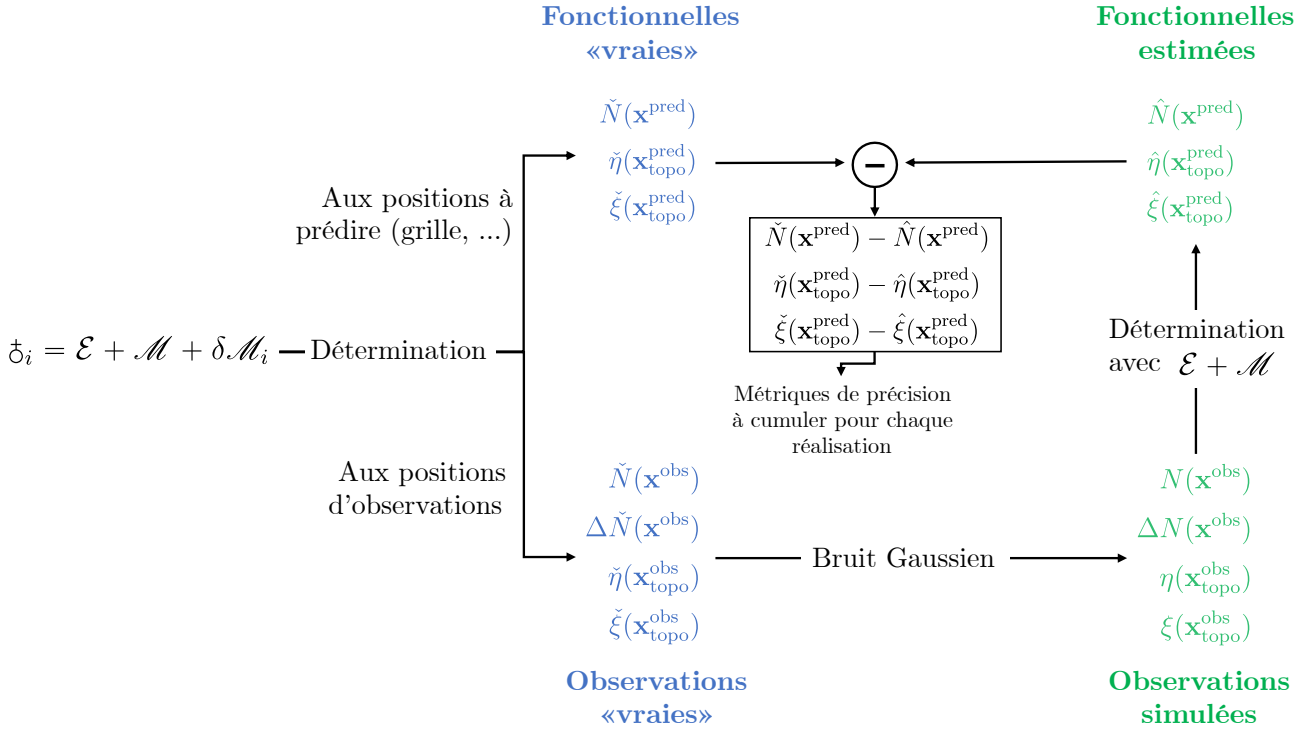


FIGURE 5.21 – Processus de la simulation en circuit fermé pour la détermination d'un champ de gravité local

Les sous-sections suivantes détaillent les étapes de cette simulation en les mettant en relation avec les éléments généraux cités en introduction.

5.2.1 Terre « vraie » δ_i d'une réalisation

La Terre vraie est définie comme étant la somme $\mathcal{E} + \mathcal{M} + \delta\mathcal{M}_i$ où $\delta\mathcal{M}_i$ est l'ensemble des masses dites *non-modélisées* générées de manière procédurale (voir section 5.1). Ces dernières sont considérées ici comme étant des masses ponctuelles.

5.2.2 Détermination des fonctionnelles et observations « vraies »

À partir de la Terre vraie δ_i d'une réalisation, il est par définition possible de prédire l'ensemble des fonctionnelles du champ de gravité de manière déterministe.

Cette détermination aux positions d'observations et de prédiction se réalise en deux parties :

Détermination du champ gravitationnel généré par $\mathcal{M} + \delta\mathcal{M}_i$

Concrètement, l'objectif est de déterminer le potentiel gravitationnel $V_{\mathcal{M}+\delta\mathcal{M}_i}$ et ses premières dérivées $\nabla V_{\mathcal{M}+\delta\mathcal{M}_i}$ générés par $\mathcal{M} + \delta\mathcal{M}_i$ en chaque position \mathbf{x} . Afin d'alléger la notation, $\mathcal{M} + \delta\mathcal{M}_i$ devient \mathcal{M}_i ci-dessous.

La propriété d'additivité des potentiels (décrite sous la section 2.3.2) permet d'écrire :

$$V_{\mathcal{M}_i}(\mathbf{x}) = V_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) + V_{\delta\mathcal{M}_i}(\mathbf{x}) \quad (5.16)$$

Grâce à la linéarité de l'opérateur gradient, ce principe s'applique également à toutes les dérivées du potentiel. Le vecteur contenant les accélérations gravitationnelles générées par \mathcal{M}_i s'écrit alors :

$$\nabla V_{\mathcal{M}_i}(\mathbf{x}) = \nabla V_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) + \nabla V_{\delta\mathcal{M}_i}(\mathbf{x}) \quad (5.17)$$

ou, de manière équivalente :

$$\mathbf{g}_{\mathcal{M}_i}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_{x,\mathcal{M}_i}(\mathbf{x}) \\ g_{y,\mathcal{M}_i}(\mathbf{x}) \\ g_{z,\mathcal{M}_i}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \mathbf{g}_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_{\delta\mathcal{M}_i}(\mathbf{x}) \quad (5.18)$$

Les détails mathématiques du calcul d'un potentiel gravitationnel V et de son vecteur d'accélération \mathbf{g} générés par un ensemble de masses (polyèdres ou masses ponctuelles) se trouvent dans la section 2.4.

Détermination des fonctionnelles « vraies »

Les développements mathématiques présentés succinctement ci-dessous sont détaillés dans la sous-section 4.4.1. Ils sont simplement réécrits de manière à correspondre au formalisme du contexte de la simulation.

Cote du géoïde

$$N(\mathbf{x}) \approx \frac{V_{\mathcal{M}_i}(\mathbf{x}_\varepsilon)}{9.81} \quad (5.19)$$

Différence de cotes du géoïde

$$\Delta N(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) \approx \frac{V_{\mathcal{M}_i}(\mathbf{x}_B^\varepsilon) - V_{\mathcal{M}_i}(\mathbf{x}_A^\varepsilon)}{9.81} \quad (5.20)$$

Déviations de la verticale

$$\begin{aligned} \eta(\mathbf{x}) &\approx -\frac{1}{9.81} \cdot g_{x,\mathcal{M}_i}(\mathbf{x}) \\ \xi(\mathbf{x}) &\approx -\frac{1}{9.81} \cdot g_{y,\mathcal{M}_i}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.21)$$

La figure 5.22 ci-dessous illustre un exemple de déviations de la verticale « vraies » déterminées

à la surface topographique.

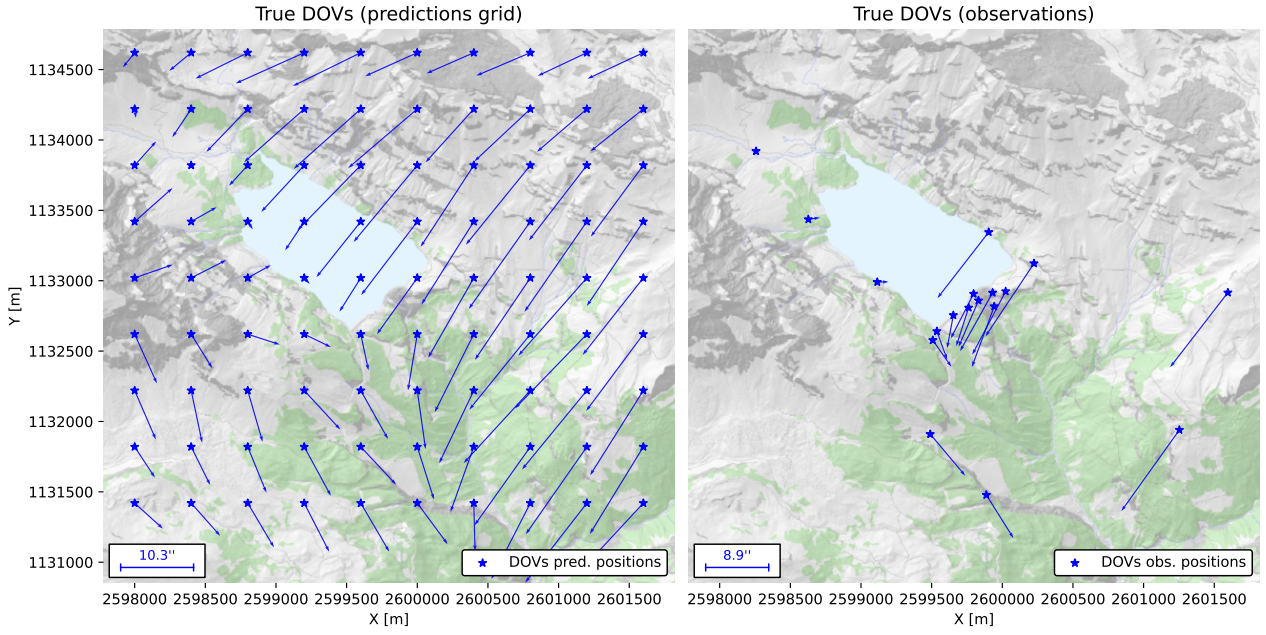


FIGURE 5.22 – Exemple : déviations de la verticale « vraies » à la surface topographique pour la grille de prédiction et les positions d’observations

5.2.3 Génération des observations simulées

Une fois les observations « vraies » établies, un bruit gaussien d’écart-type σ propre à chaque observation est ajouté afin de générer des observations simulées :

$$\begin{aligned}
 N(\mathbf{x}^{\text{obs}}) &= \check{N}(\mathbf{x}^{\text{obs}}) + \varepsilon_N & \varepsilon_N &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_N^2) \\
 \Delta N(\mathbf{x}_A^{\text{obs}}, \mathbf{x}_B^{\text{obs}}) &= \Delta \check{N}(\mathbf{x}_A^{\text{obs}}, \mathbf{x}_B^{\text{obs}}) + \varepsilon_{\Delta N} & \varepsilon_{\Delta N} &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\Delta N}^2) \\
 \eta(\mathbf{x}_{\text{topo}}^{\text{obs}}) &= \check{\eta}(\mathbf{x}_{\text{topo}}^{\text{obs}}) + \varepsilon_\eta & \varepsilon_\eta &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_\eta^2) \\
 \xi(\mathbf{x}_{\text{topo}}^{\text{obs}}) &= \check{\xi}(\mathbf{x}_{\text{topo}}^{\text{obs}}) + \varepsilon_\xi & \varepsilon_\xi &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_\xi^2)
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

La figure 5.23 ci-dessous illustre la création d’observations simulées. La différence est difficile à percevoir au vu de la grandeur des déviations de la verticale et de la précision de ces dernières ($\sigma_\eta = \sigma_\xi = 0.05$ seconde d’arc). Cependant, cette haute précision est utile par la suite afin de pouvoir analyser la détection d’une masse non-modélisée dans cet exemple.

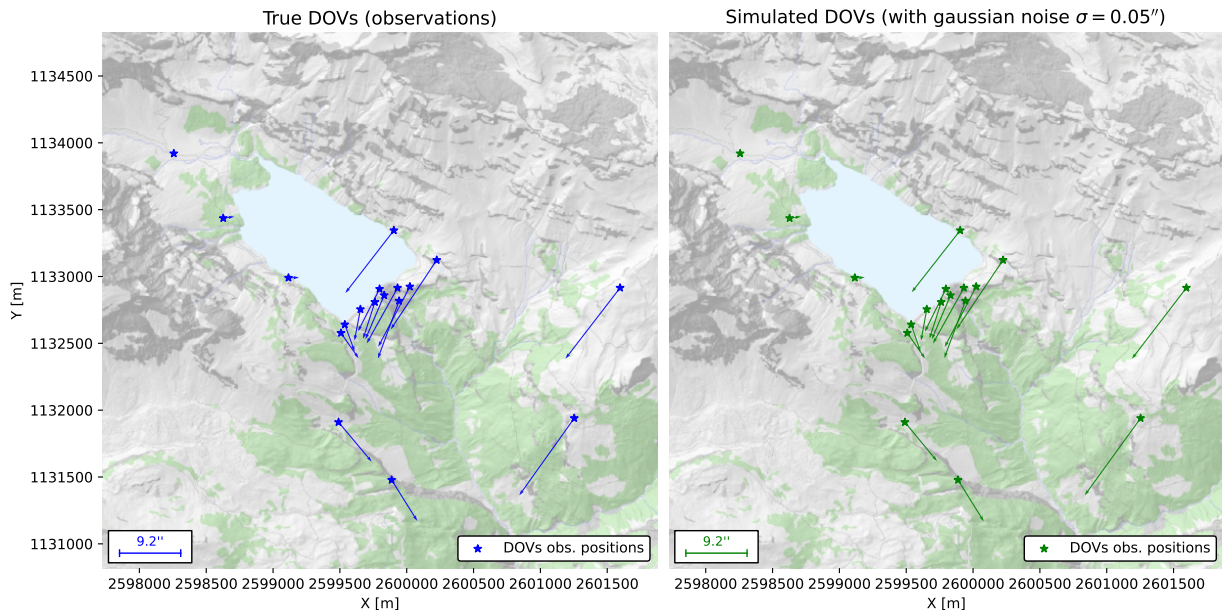


FIGURE 5.23 – Exemple : déviations de la verticale simulées à partir d’observations « vraies »

5.2.4 Détermination complète du champ de gravité

Pour chaque réalisation, les observations simulées peuvent alors être traitées comme de véritables mesures de terrain et intégrées dans l’ensemble du processus de détermination des fonctionnelles du champ de gravité présenté au chapitre 4. Il est important de souligner que les masses non modélisées $\delta\mathcal{M}_i$ ne sont pas incluses dans les modèles utilisés pour cette détermination. Elles se manifestent uniquement à travers les observations simulées, ce qui constitue précisément l’objectif des simulations en circuit fermé : évaluer la capacité d’un système d’observation à détecter des masses non-modélisées.

La figure 5.24 ci-dessous présente la détermination du co-géoïde pour l’exemple utilisé dans les figures précédentes. Une grosse masse souterraine non-modélisée (zone rougeâtre) de 10^9 [kg] a été ajoutée. Cette dernière est totalement irréaliste, elle vise simplement à illustrer comment un système d’observation peut détecter des effets générés par des masses non-modélisées.

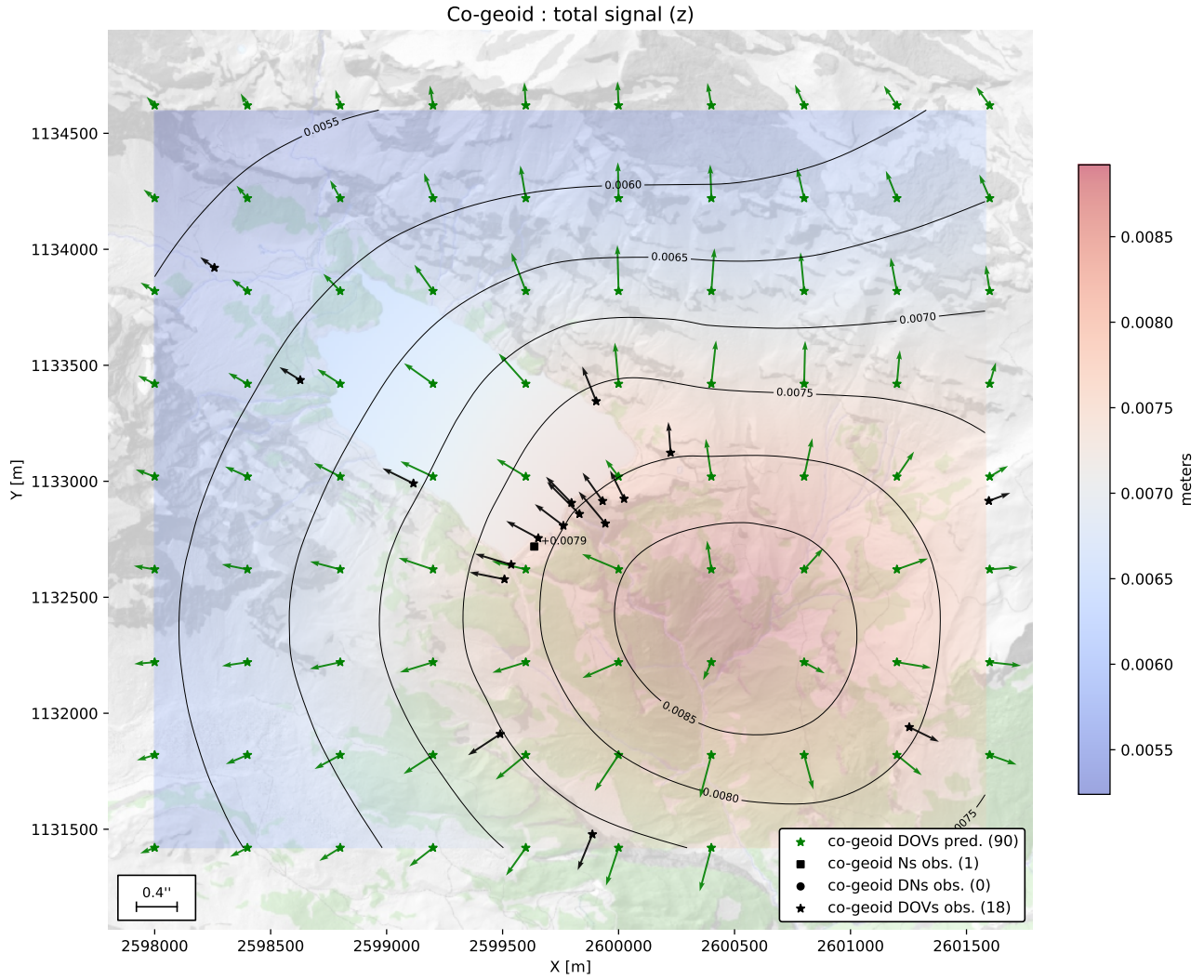


FIGURE 5.24 – Exemple : co-géoïde (signal total) estimé

5.2.5 Métriques de précision

La dernière étape lors d'une réalisation i consiste à calculer, pour chaque position \mathbf{x}_{pred} , la différence entre la fonctionnelle prédite et estimée :

$$\begin{aligned}
 \delta N_i(\mathbf{x}_{\text{pred}}) &= \tilde{N}_i(\mathbf{x}^{\text{pred}}) - \hat{N}_i(\mathbf{x}^{\text{pred}}) \\
 \delta \eta_i(\mathbf{x}_{\text{pred}}) &= \tilde{\eta}_i(\mathbf{x}_{\text{topo}}^{\text{pred}}) - \hat{\eta}_i(\mathbf{x}_{\text{topo}}^{\text{pred}}) \\
 \delta \xi_i(\mathbf{x}_{\text{pred}}) &= \tilde{\xi}_i(\mathbf{x}_{\text{topo}}^{\text{pred}}) - \hat{\xi}_i(\mathbf{x}_{\text{topo}}^{\text{pred}})
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

Les figures 5.25 et 5.26 montrent que le géoïde « vrai » diffère de celui estimé, ce qui est parfaitement normal au vu de la masse non-modélisée anormale introduite à titre d'illustration.

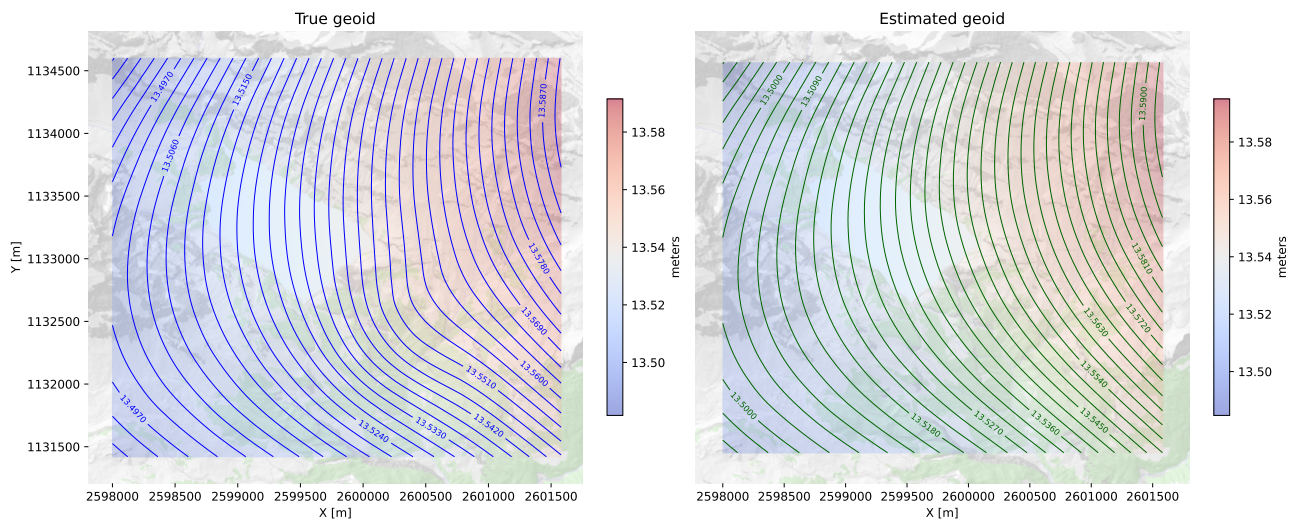


FIGURE 5.25 – Exemple : géoïde « vrai » et géoïde estimé

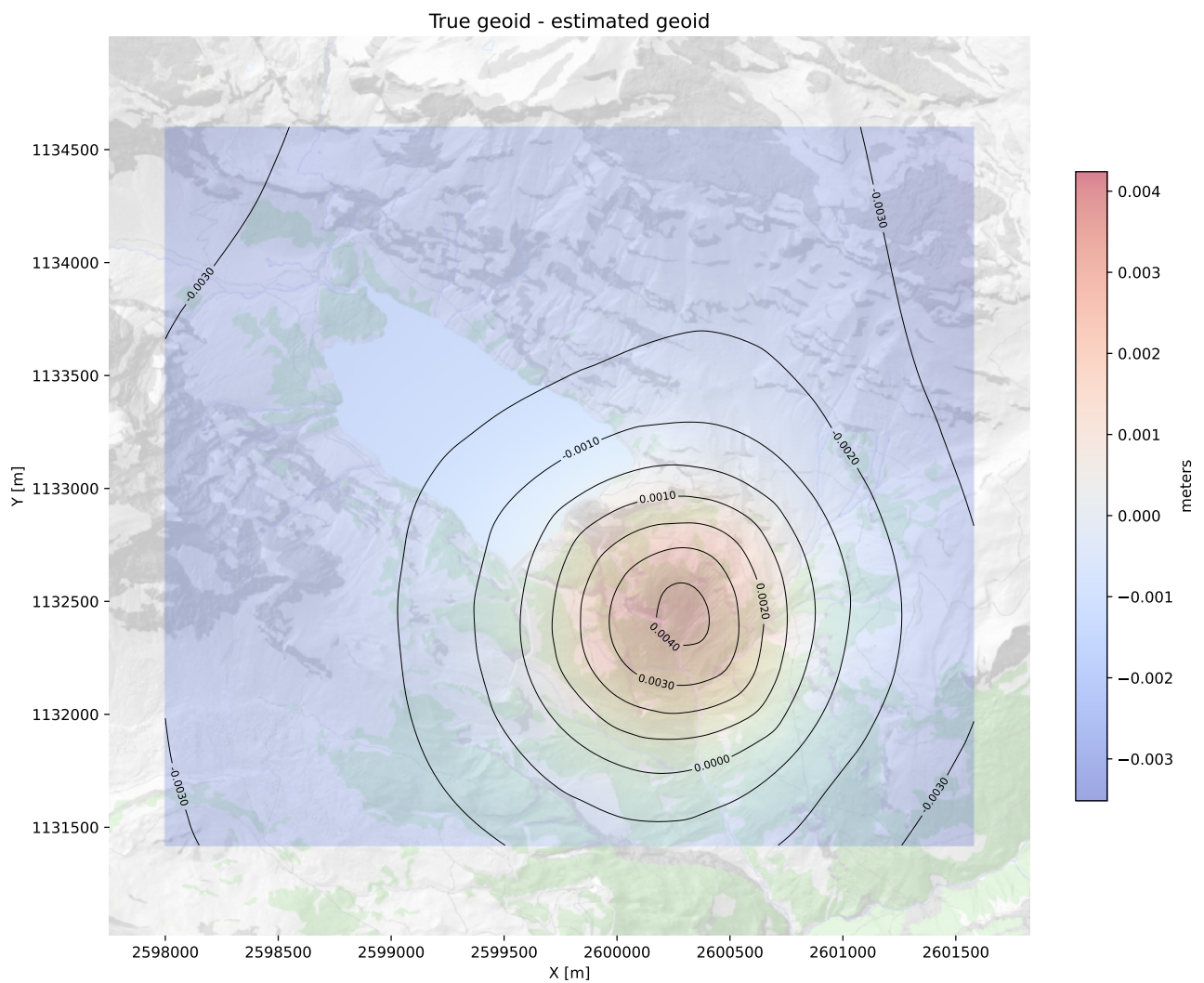


FIGURE 5.26 – Exemple : différence entre le géoïde « vrai » et le géoïde estimé

Finalement, en prenant en compte toutes les M réalisations, il est facile de calculer tout type de statistique utile, par exemple :

$$\begin{aligned}
 \text{RMS}_{\delta N(\mathbf{x}_{\text{pred}})} &= \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\delta N_i(\mathbf{x}_{\text{pred}}))^2} \\
 \text{MOY}_{\delta N(\mathbf{x}_{\text{pred}})} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \delta N_i(\mathbf{x}_{\text{pred}}) \\
 \text{STD}_{\delta N(\mathbf{x}_{\text{pred}})} &= \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\delta N_i(\mathbf{x}_{\text{pred}}) - \text{MOY}_{\delta N(\mathbf{x}_{\text{pred}})})^2}
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Ces trois statistiques permettent d'évaluer la précision d'une détermination d'un champ de gravité :

- RMS : renseigne sur l'erreur globale moyenne entre valeurs prédites et estimées ;
- MOY (moyenne) : met en évidence un éventuel biais systématique dans les différences ;
- STD (écart-type) : décrit la dispersion des réalisations autour de la moyenne des différences.

Évidemment, ces statistiques peuvent être réalisées de manière analogue avec $\delta\eta_i(\mathbf{x}_{\text{pred}})$ et $\delta\xi_i(\mathbf{x}_{\text{pred}})$.

Plusieurs déclinaisons de l'analyse de ces différences peuvent être réalisées :

- sur l'ensemble des positions de prédiction (p. ex. une grille régulière),
- sur une position spécifique de prédiction (p. ex. proche d'un pilier géodésique),
- de manière relative entre deux positions à prédire (p. ex. aux deux extrémités d'un ouvrage) ;
- ...

Ces éléments sont présentés et illustrés concrètement dans la section 7.4 traitant un cas d'utilisation réel aux alentours du barrage de Zeuzier (VS).

5.3 Simulateur associé à $E_{\mathcal{S}_{AB}}^{\text{CORR}}$

Ce simulateur consiste à qualifier une correction orthométrique $E_{\mathcal{S}_{AB}}^{\text{CORR}}$ dans le cadre du pré-traitement d'un cheminement de GNSS-nivellement. En d'autres termes, il permet de prédire la précision à laquelle s'attendre sur une différence de cotes du géoïde $\Delta N(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B)$ introduite comme une observation dans la méthode « remove-compute-restore ». L'ensemble des développements mathématiques du pré-traitement du GNSS-nivellement sont donnés dans la sous-section 4.2.2.

La figure 5.2 de l'introduction du présent chapitre 5 est détaillée pour ce type de simulation dans la figure 5.27 ci-dessous.

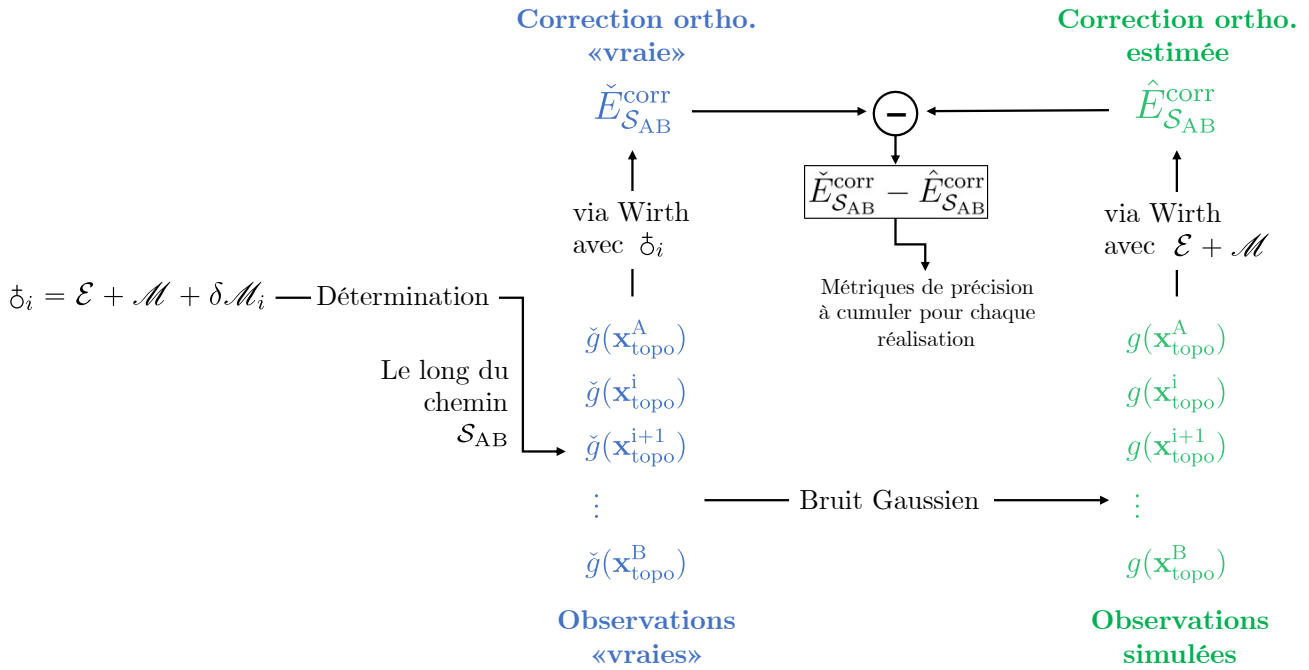


FIGURE 5.27 – Processus de la simulation en circuit fermé pour la détermination de la correction orthométrique

5.3.1 Détermination des observations « vraies »

Ici, les observations sont définies comme étant la succession ordonnée de mesures de $g(\mathbf{x}_{topo})$ le long du cheminement \mathcal{S}_{AB} . Il est important de souligner que les coordonnées et les altitudes (et, par conséquent, les dénivelées) sont fournies en entrée de la simulation et sont considérées comme constantes.

À partir de la Terre vraie δ_i d'une réalisation, il est tout à fait possible de prédire la valeur de la gravité à toutes les positions $\check{g}(\mathbf{x}_{topo})$ du chemin.

Concrètement, l'objectif est de prédire cette fonctionnelle à partir du modèle de masse \mathcal{M}_i et d'un ellipsoïde de référence \mathcal{E} . Tout comme dans la section précédente, \mathcal{M}_i est défini comme étant $\mathcal{M} + \delta\mathcal{M}_i$ afin d'alléger la notation. La formule est la suivante :

$$\check{g}(\mathbf{x}_{topo}) \approx \gamma_0 + \tau_o \cdot H^{orth}(\mathbf{x}_{topo}) + g_{z,\mathcal{M}_i}(\mathbf{x}_{topo}) \quad (5.25)$$

avec :

- γ_0 : gravité normale sur l'ellipsoïde \mathcal{E} (≈ 9.81) [$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$];
- τ_o : gradient de la gravité normale γ_0 généré par l'ellipsoïde \mathcal{E} ($\approx -0.3086 \cdot 10^{-5}$) [s^{-2}];
- $H^{orth}(\mathbf{x}_{topo})$: altitude orthométrique approchée [m];
- $g_{z,\mathcal{M}_i}(\mathbf{x}_{topo})$: composante z du vecteur des accélérations gravitationnelles générées par \mathcal{M}_i [$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$].

5.3.2 Génération des observations simulées

Une fois les observations « vraies » déterminées, un simple bruit gaussien d'écart-type σ_g propre à chaque observation est ajouté afin de générer les observations de gravité simulées :

$$g(\mathbf{x}_{\text{topo}}) = \check{g}(\mathbf{x}_{\text{topo}}) + \varepsilon_g \quad \text{avec} \quad \varepsilon_g \sim \mathcal{N}(0, \sigma_g^2) \quad (5.26)$$

L'ordre de grandeur d'un écart-type σ_g est d'environ 10 [μgal] mais cela peut varier selon le modèle de gravimètre.

5.3.3 Détermination de la correction orthométrique « vraie »

Les développements mathématiques détaillés sont présentés dans la sous-section 4.2.2. Dans le schéma de la figure 5.27, ce traitement est identifié par la mention « via Wirth », indiquant explicitement l'utilisation de ce procédé.

Celui-ci est appliqué indifféremment aux observations « vraies » ainsi qu'aux observations simulées.

5.3.4 Métriques de précision

La dernière étape de ce type de simulation est de produire, à chaque réalisation i , la différence entre la correction orthométrique « vraie » et estimée :

$$\delta E_{SABi}^{\text{corr}} = \check{E}_{SABi}^{\text{corr}} - \hat{E}_{SABi}^{\text{corr}} \quad (5.27)$$

Ensuite, il est possible de produire des métriques simples sur l'ensemble des $\delta E_{SAB}^{\text{corr}}$ de manière analogue à l'équation 5.23 (RMS, MOY, STD).

Ces trois statistiques permettent d'évaluer la précision d'une correction orthométrique pour un cheminement donné :

- RMS : renseigne sur l'erreur globale moyenne entre valeurs prédites et estimées ;
- MOY (moyenne) : met en évidence un éventuel biais systématique dans les différences ;
- STD (écart-type) : décrit la dispersion des réalisations autour de la moyenne des différences.

Tout comme l'autre type de simulation, ces éléments sont présentés et illustrés concrètement dans la section 7.4 traitant un cas d'utilisation réel aux alentours du barrage de Zeuzier (VS).

Chapitre 6

Conception et développement d'outils

Ce chapitre vise à présenter les principaux éléments des différents développements réalisés. Il s'agit, en d'autres termes, de décrire la manière dont les différents modèles mathématiques explicités dans le présent rapport ont été mis en œuvre de façon concrète avec le langage de programmation Python (version 3.11.7).

Le volume de développement étant important, sa description n'est volontairement pas exhaustive mais se concentre uniquement sur les points principaux. L'ensemble du code produit et l'arborescence de fichiers sont fournis en annexe A.

6.1 Généralités

La figure 6.1 ci-dessous résume les principaux éléments de l'architecture des outils mis en place.

Tout d'abord, l'ensemble des différents outils sont accessibles par :

- un script Python avec un import des modules à utiliser, ou
- une interface graphique.

Ces deux procédés fonctionnent de manière identique et font simplement des appels aux méthodes des classes principales de délégation afin de produire les résultats. Ces classes de délégation, comme leur nom l'indique, s'occupent de rassembler les différentes classes et fonctions selon l'outil choisi. Par exemple, si l'on veut réaliser une détermination des fonctionnelles du champ de gravité, celle-ci se déroule comme suit (dans les grandes lignes) :

- Création d'une instance vierge de `RealDetermination` ;
- Réglage des paramètres nécessaires (liens des fichiers d'observations, modèle de masse, etc.) ;
- Détermination des effets produits par les masses modélisées avec la classe `GravityField` ;
- Estimation des fonctionnelles par « remove-compute-restore » via la classe `RemoveComputeRestore` qui elle-même fait appel à la classe `CoGeoid` pour l'estimation du co-géïode ;
- Production des résultats : dans ce cas, un listing et différents plots.

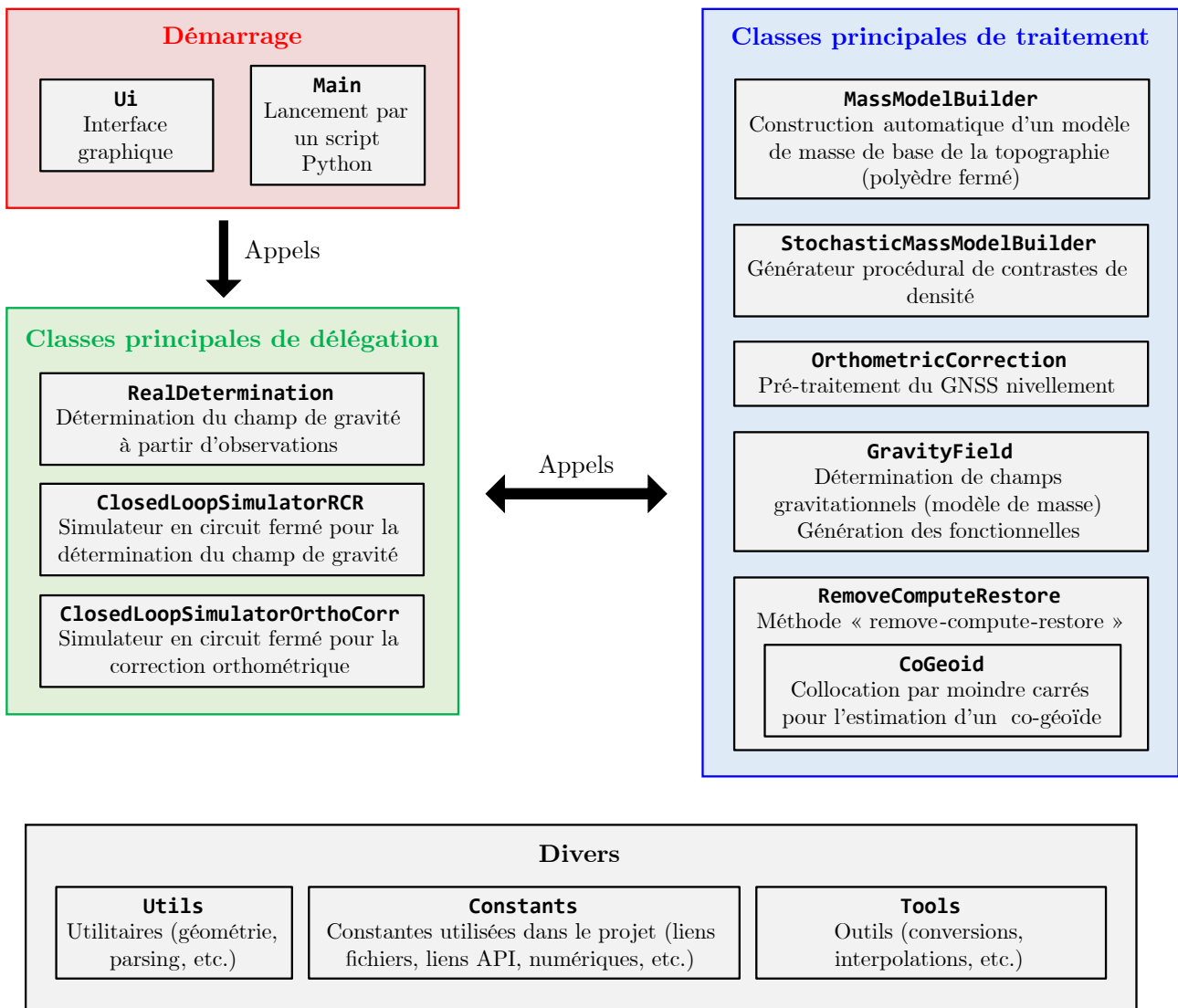


FIGURE 6.1 – Liste des éléments principaux de l'architecture des outils développés

6.2 Principales bibliothèques externes utilisées

La description de l'usage de certaines bibliothèques externes est donnée dans le tableau 6.1 ci-dessous.

Nom	Cadre(s) d'utilisation
<code>geopandas</code>	Écriture de fichiers SHP
<code>itertools</code>	Itérateur optimisé dans la création des faces de polyèdres
<code>matplotlib</code>	Génération de graphiques et cartes 2D
<code>numpy</code>	Calcul vectoriel et algèbre linéaire
<code>open3d</code>	Fonction de distance signée d'un point à un mesh dans le cadre de la génération procédurale des contrastes de densité
<code>pandas</code>	Lecture et interprétation de fichiers CSV
<code>pickle</code>	Sérialisation d'instances de classes (écriture et sauvegarde binaire pour recharger un objet ou gérer le cache)
<code>prettytable</code>	Écriture de tableaux et listings ASCII
<code>pyproj</code>	Transformations entre systèmes de coordonnées (transformation de la déviation de la verticale)
<code>PyQt5</code>	Interface graphique et interactions avec l'utilisateur
<code>rasterio</code>	Traitements raster (rééchantillonnage, clip, fusion, etc.)
<code>scipy.spatial</code>	Génération de KDTree pour la recherche de plus proches voisins (pour les interpolations). Triangulation de Delaunay dans la création d'un polyèdre.
<code>Shapely</code>	Lecture et géotraitements de fichiers SHP

TABLEAU 6.1 – Description de l'usage des bibliothèques externes utilisées (ordre alphabétique)

6.3 Interface graphique

L'ensemble de l'interface graphique développée dans le cadre de ce travail repose sur la bibliothèque `Qt`, et plus précisément sur son implémentation Python, `PyQt5`. Ce choix s'inscrit dans une volonté de disposer d'un environnement graphique largement utilisé dans le domaine des applications scientifiques. L'interface constitue l'un des points d'accès principaux pour le lancement et le paramétrage de l'ensemble des outils présentés dans ce rapport.

La conception des fenêtres et des mises en page a été réalisée à l'aide de `QtDesigner`. Cet outil permet de définir dynamiquement les mises en page, les emplacements des objets et les relations hiérarchiques entre les éléments de l'interface. Une attention particulière a été portée au caractère adaptatif de l'interface (« responsivity »), afin que les fenêtres restent lisibles quelles que soient leur taille et leur échelle, notamment grâce à l'utilisation systématique de layouts dynamiques (voir figure 6.2).

Du point de vue de l'interaction avec l'utilisateur, le fonctionnement de l'interface repose sur le mécanisme de signaux et de slots proposé par `Qt`. Ce paradigme est notamment utilisé pour

piloter les barres de chargement associées aux traitements les plus coûteux en temps de calcul. Il permet de conserver une interface réactive, tout en informant l'utilisateur de l'état d'avancement des opérations en cours.

La gestion des erreurs est volontairement maintenue à un niveau simple, puisque cette application ne poursuit pas un but de production en l'état actuel. Les problèmes courants, tels que des paramètres manquants, des fichiers invalides ou des incohérences de configuration, sont signalés à l'utilisateur au moyen de boîtes de dialogue. En complément, les messages détaillés et les informations de débogage sont systématiquement écrits dans la console, ce qui facilite l'identification et la correction des erreurs lors des phases de développement et de test.

Enfin, l'architecture de l'interface graphique a été pensée de manière modulaire et ordonnée. Chaque onglet de l'application correspond à une classe distincte, responsable de la gestion de ses widgets, de ses signaux et de sa logique d'interaction interne. Cette organisation simplifie également la maintenance et permet d'étendre plus facilement l'interface à d'autres fonctionnalités.

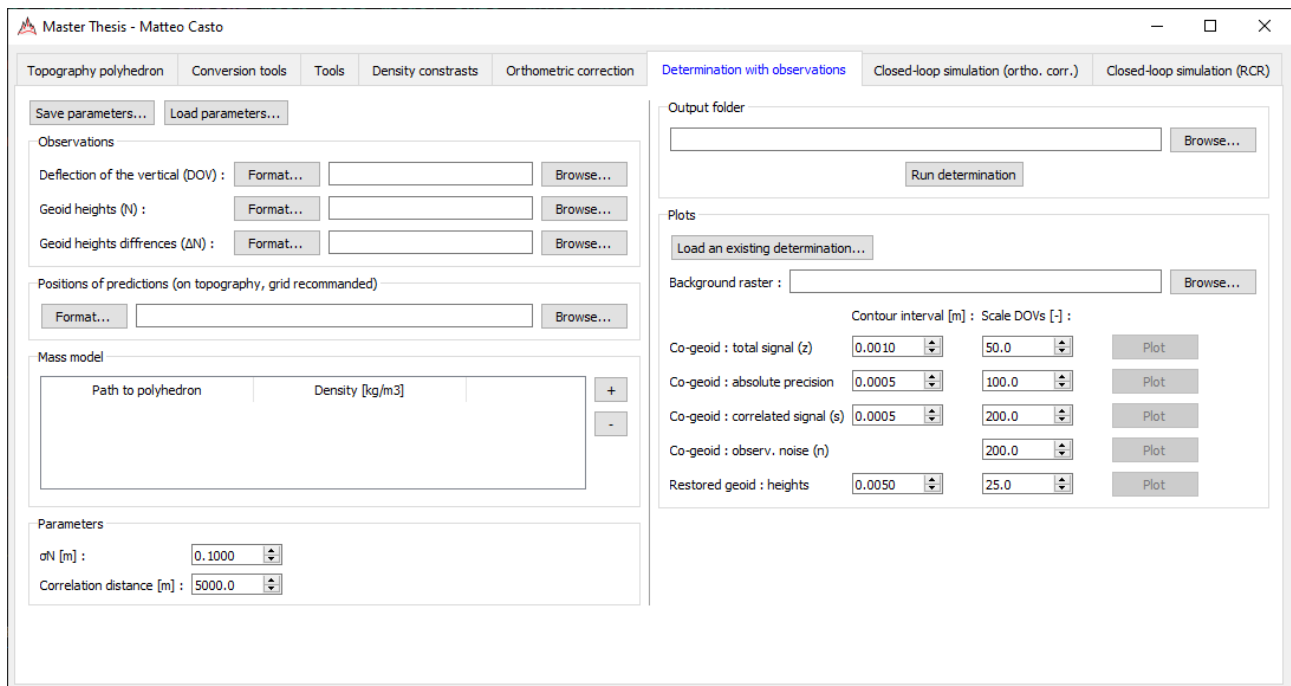


FIGURE 6.2 – Extrait de l'interface graphique, onglet de la détermination du champ de gravité

6.4 Optimisations computationnelles

Le développement s'est appuyé sur un ensemble de bonnes pratiques de programmation appliquées de manière systématique tout au long du projet. Avant toute phase d'écriture de code, une réflexion préalable a été menée afin d'anticiper la structure générale et de définir une esquisse claire des différents modules et leurs interactions. Cette phase de conception a permis d'identifier les responsabilités de chaque composant et de limiter les refactorisations lourdes lors des étapes ultérieures.

Les conventions de nommage définies par la norme Python PEP8 ont été respectées, tant pour les classes que pour les fonctions, les variables et les commentaires. Cette homogénéité contribue à améliorer la lisibilité du code et facilite sa maintenance, en particulier dans un contexte de développement scientifique où les scripts pourraient rapidement gagner en complexité.

Une attention particulière a également été portée au principe KISS, pour *Keep it stupid simple*. Ce principe joue un rôle central dans le développement de projets de taille importante, en incitant à privilégier des solutions simples, explicites et facilement compréhensibles. L'objectif est de trouver un compromis équilibré entre rigueur, clarté algorithmique et facilité de lecture du code, afin de garantir la pérennité des développements. Dans cette même logique, chaque classe ou fonction a été conçue pour remplir une seule responsabilité bien définie. Cette approche favorise une modularité efficace et limite ainsi les dépendances inutiles entre les composants.

Comme la plupart des projets de programmation de taille significative, le développement a été accompagné d'un suivi rigoureux du code source à l'aide d'un système de gestion de versions. L'utilisation de `git`, couplée à la plateforme de dépôt GitLab, a permis de tracer l'évolution du code, de documenter les différentes étapes de développement et de sécuriser les modifications successives. Cette approche facilite également le retour à des états précédents du projet, ainsi que la reproduction et la pérennité des développements réalisés. Le dépôt GitLab est accessible (pour le moment, de manière interne à la HEIG-VD) sous le lien https://gitlab.com/heig-vd-geo/tm-casto/-/tree/master?ref_type=heads.

Enfin, le choix du langage Python implique certaines contraintes en termes de performances, celui-ci étant un langage interprété et bien plus lent que des langages compilés bas niveau tels que C ou Java. Afin de pallier ces limitations, les traitements numériques ont été conçus de manière à exploiter au maximum les opérations vectorisées et parallélisées, notamment à l'aide de `numpy`. Ce point est crucial dans le cadre des calculs intensifs réalisés dans ce travail. À titre d'exemple, le calcul d'un champ gravitationnel impliquant plusieurs milliers de masses ponctuelles (p. ex. 5000), évalué sur un grand nombre de positions (p. ex. 250) et, le tout, répété sur de nombreuses réalisations (p. ex. 100), impose une vectorisation rigoureuse des opérations ($5000 \cdot 250 \cdot 100 = 125'000'000$). Sans cette approche, les temps de calcul pourraient rapidement atteindre plusieurs heures, rendant les calculs impraticables.

De plus, certaines opérations, telles que le téléchargement de tuiles raster via web API, sont optimisées au moyen de mécanismes de mise en cache. Cette approche permet d'éviter le téléchargement redondant de données identiques et contribue ainsi à réduire significativement les temps de téléchargement.

Chapitre 7

Expérimentation sur un cas réel : Zeuzier (VS)

Après le développement des bases théoriques, des modèles de masse et des outils numériques nécessaires à la détermination et à la qualification de champs de gravité locaux, ce chapitre propose une confrontation de ces éléments à un cas réel. Celui-ci repose sur des mesures effectivement réalisées sur le terrain. L'objectif est de tester, valider et illustrer les méthodes développées dans un contexte concret.

L'expérimentation est menée aux alentours du barrage de Zeuzier, situé dans le canton du Valais, en Suisse. Ce site est particulièrement pertinent en raison de ses fortes variations topographiques, de la présence d'un ouvrage majeur et de l'existence d'un réseau géodésique de surveillance dédié. La figure 7.1 présente la situation géographique du site.

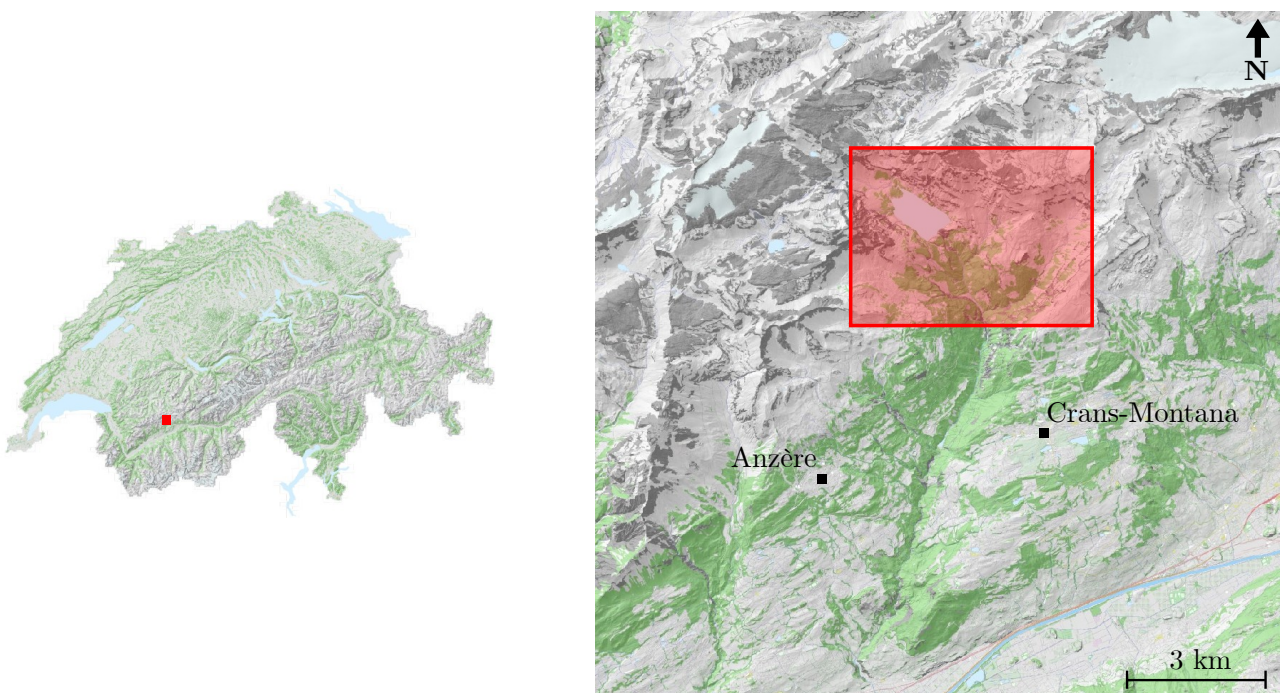


FIGURE 7.1 – Situation géographique de la zone de travail

Le barrage de Zeuzier fait l'objet d'un suivi géodésique régulier tous les cinq ans (« GEOSAT SA », 2020). Ce suivi repose sur un réseau de haute précision combinant des observations terrestres classiques, du GNSS et du nivellement. Il a été mis en place à des fins d'auscultation de la stabilité de l'ouvrage principal ainsi que celle des berges. Les figures 7.2 et 7.3 illustrent le canevas du réseau de mesures.

L'un des enjeux centraux est de permettre de relier de manière cohérente les différents types de mesures géodésiques à l'aide d'une modélisation fine des fonctionnelles du champ de gravité local. Entre autres, la cote du géoïde N ainsi que les composantes est-ouest η et nord-sud ξ de la déviation de la verticale. Les diverses mesures, le modèle de masse, les traitements et les listings sont présents dans les annexes B et C.

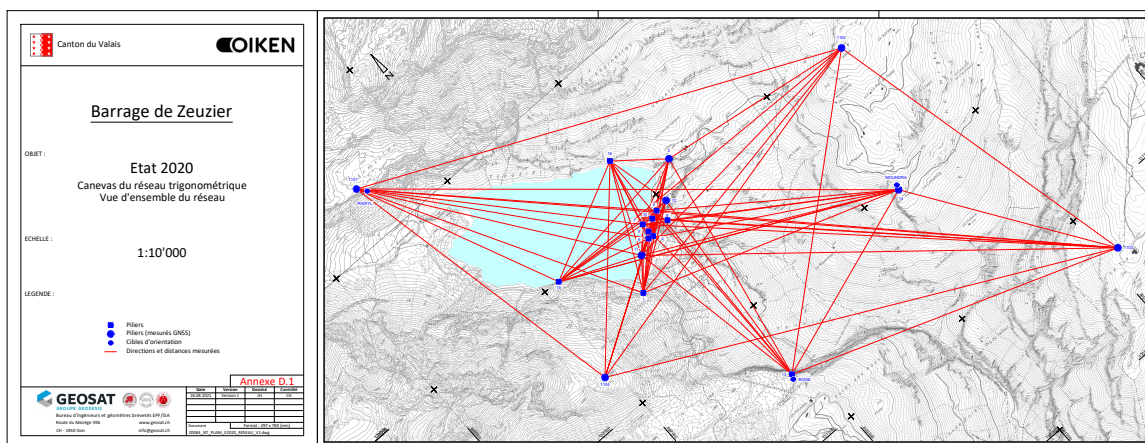


FIGURE 7.2 – Vue élargie du canevas planimétrique du réseau géodésique de Zeuzier (format complet à retrouver en annexe E)

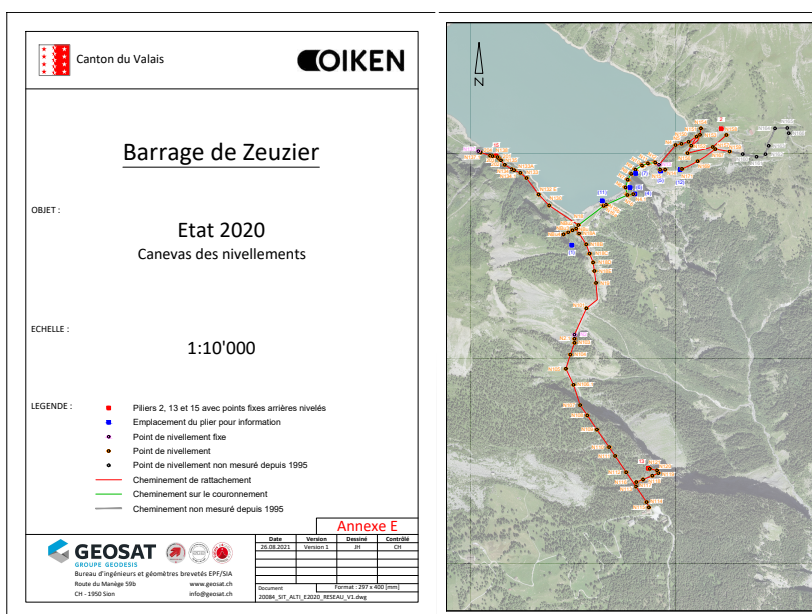


FIGURE 7.3 – Vue élargie du canevas altimétrique du réseau géodésique de Zeuzier (format complet à retrouver en annexe E)

7.1 Réalisation des mesures

Dans le cadre du présent travail, une campagne de mesure en lien avec le champ de gravité a été réalisée aux mois de septembre et octobre 2025. Celle-ci consistait en :

- 18 stations d’astro-géodésie,
- 3 cheminements de gravimétrie, le long des lignes de nivellement principales.

7.1.1 Astro-géodésie

Dans l’espace de cinq nuits, 18 points de mesures astro-géodésiques ont été stationnés à l’aide du système PyDaedalus (DÉLÈZE, 2024) monté sur une station totale robotisée Leica TS60 0.5”. Treize d’entre eux sont localisés sur ou à proximité directe d’un pilier du réseau géodésique existant. Les cinq autres se trouvent à d’autres positions facilement accessibles et choisies afin de produire une bonne détermination spatiale du champ de gravité (figure 7.4).



FIGURE 7.4 – Photo prise lors de la campagne de mesures astro-géodésiques, station «RAWYL»

En termes de valeurs mesurées, comme le démontre la figure 7.5 ainsi que le tableau associé 7.1, des différences de plusieurs secondes d’arc apparaissent rapidement avec quelques dizaines de

mètres entre stations à la surface. Bien entendu, cela est un comportement attendu au vu de toutes les masses naturelles (topographie) et artificielles (barrage et lac) en jeu.

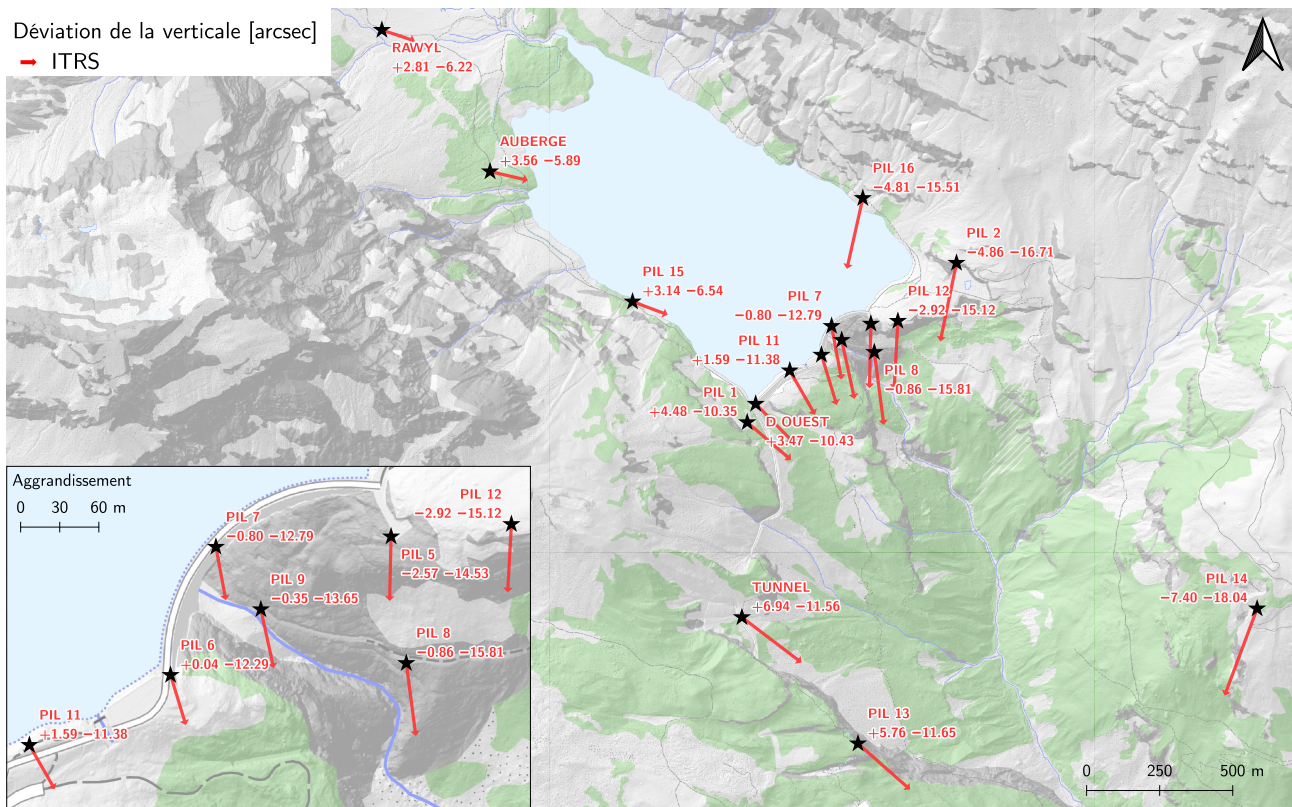


FIGURE 7.5 – Carte de la déviation de la verticale (ITRS), évaluée en 18 positions

TABLEAU 7.1 – Observations de la déviation de la verticale en ITRS

ID	λ_{ITRS} [°]	φ_{ITRS} [°]	h_{GRS80} [m]	η_{ITRS} ["]	ξ_{ITRS} ["]
PIL 5	7.43775053	46.34761923	1830.417	-0.23	-10.03
PIL 6	7.43555162	46.34666270	1830.319	2.38	-7.79
D OUEST	7.43262811	46.34515277	1831.562	5.81	-5.93
PIL 7	7.43600378	46.34754784	1830.525	1.54	-8.29
PIL 12	7.43895062	46.34770488	1864.693	-0.58	-10.62
PIL 11	7.43414416	46.34617953	1835.201	3.93	-6.88
PIL 15	7.42715238	46.34830092	1840.727	5.47	-2.04
PIL 13	7.43717781	46.33469462	1822.770	8.10	-7.15
PIL 2	7.44155707	46.34949274	1932.024	-2.52	-12.21
PIL 1102	7.45938071	46.34762436	2188.002	-4.43	-11.70
PIL 14	7.45492214	46.33884957	1925.111	-5.06	-13.54
PIL 1	7.43225200	46.34458472	1863.617	6.82	-5.85
PIL 8	7.43790236	46.34674507	1706.024	1.48	-11.31
PIL 9	7.43645210	46.34711659	1694.498	1.99	-9.15
RAWYL	7.41600316	46.35666224	1887.734	5.14	-1.71
AUBERGE	7.42081496	46.35230739	1865.760	5.89	-1.38
PIL 16	7.43739075	46.35148766	1841.410	-2.47	-11.01
TUNNELS	7.43201698	46.33858220	1826.243	9.28	-7.06

7.1.2 Gravimétrie

Un gravimètre relatif Scintrex CG-6 a été utilisé pour la campagne de mesures gravimétriques. Afin d'obtenir des valeurs absolues, un point du réseau gravimétrique de base (CH) a été déporté en 3 aller-retours au centre de la zone de travail (voir figure 7.6).

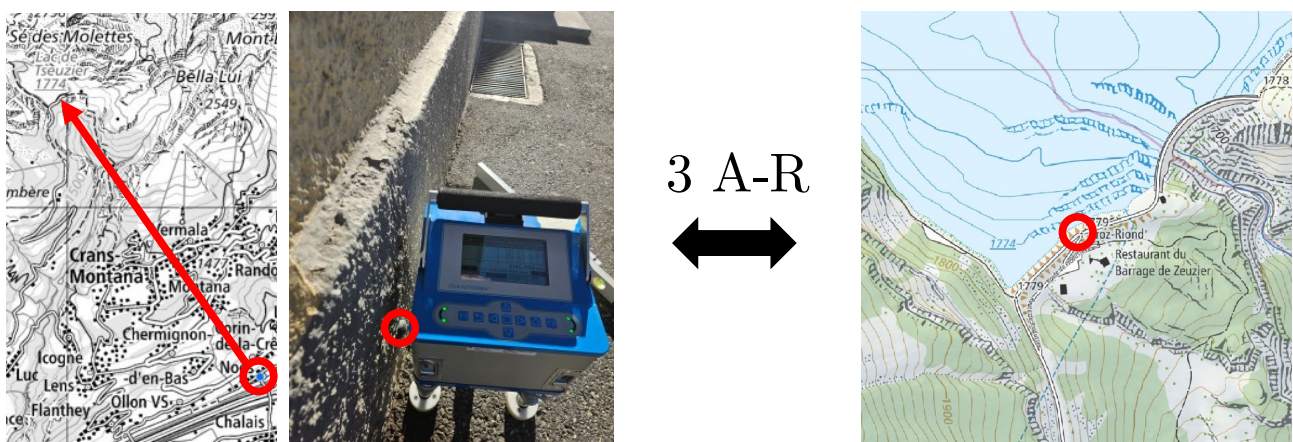


FIGURE 7.6 – Déport de la base de gravimétrie absolue n°3213-Noës

Afin de pouvoir disposer d'observations de différences de cotes du géoïde, il est nécessaire d'avoir accès à $g(\mathbf{x}) = |\mathbf{g}(\mathbf{x})|$ le long de plusieurs chemins de nivellement pour lesquels on dispose de

dé nivelées usuelles (nivellement géométrique). Dans le cadre de mesures locales et de haute précision, une mesure est effectuée tous les ≈ 100 mètres ou lors d'une importante différence de niveau. Ces points sont présentés dans les figures 7.7 et 7.8.

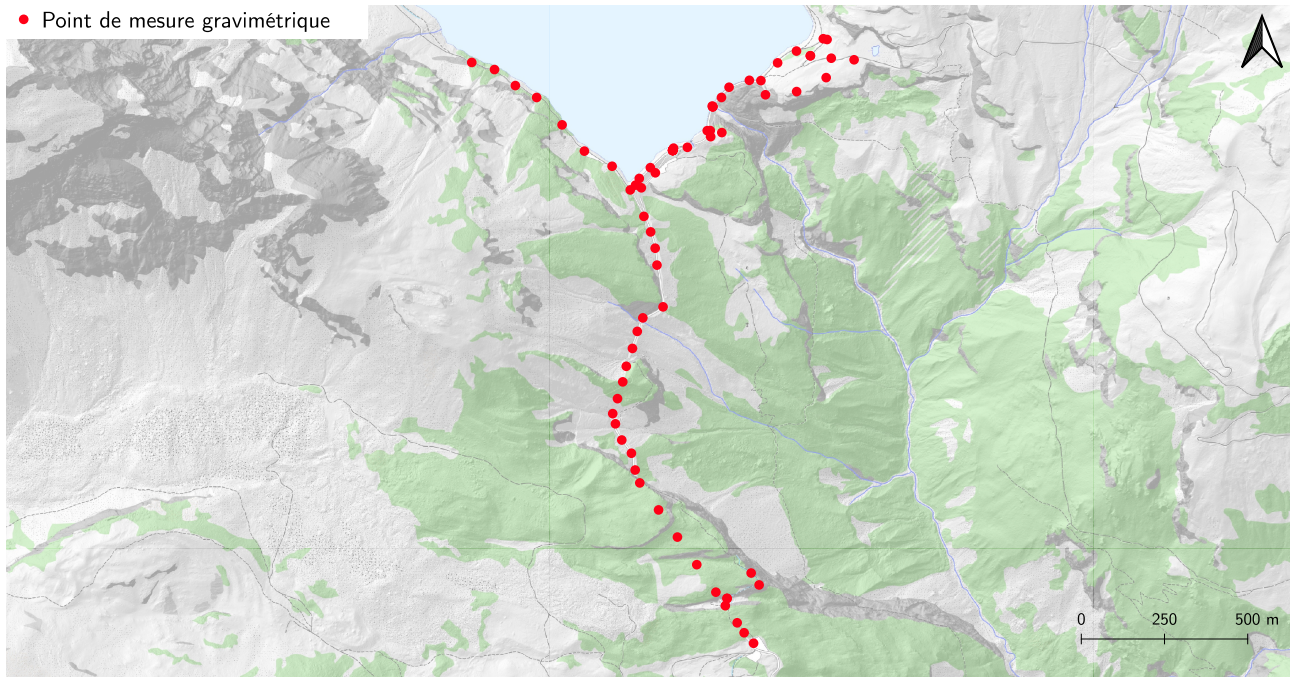


FIGURE 7.7 – Carte des 78 points de mesure gravimétrique



FIGURE 7.8 – Mesure gravimétrique sur le pilier n°7 (PIL 7)

7.2 Pré-traitements

7.2.1 Déviation de la verticale

La figure 7.9 et le tableau 7.2 présentent les résultats du passage de la déviation de la verticale en composantes ITRS vers le cadre de référence projeté MN95. Ces valeurs traitées sont celles directement utilisées en entrée de la détermination du champ de gravité local. Cette transformation est explicitée dans la section 4.2.1.

Afin de ne pas confondre la cote du géoïde N et une ordonnée N , on pose $x = E$, $y = N$ pour tout le présent chapitre.

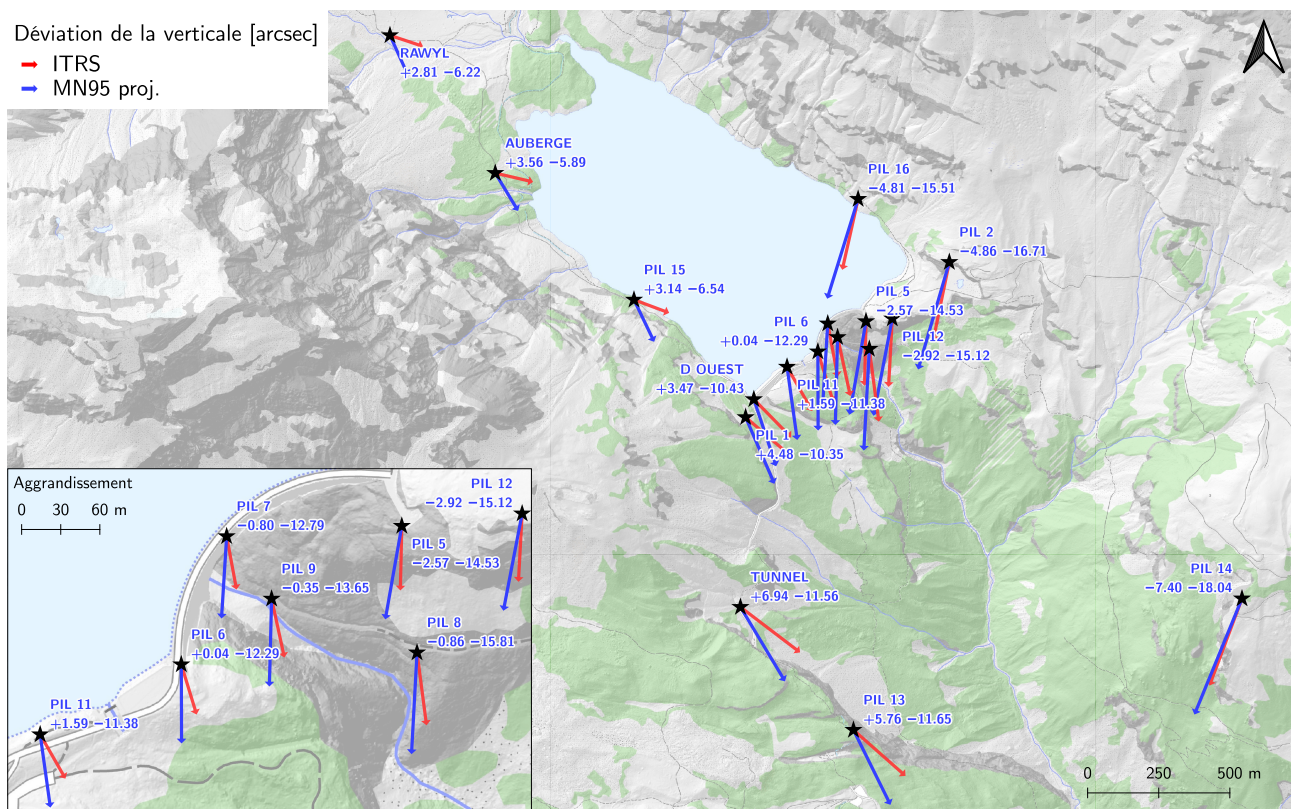


FIGURE 7.9 – Carte de la déviation de la verticale avec transformation ITRS → MN95

TABLEAU 7.2 – Observations de la déviation de la verticale MN95

ID	x_{MN95} [m]	y_{MN95} [m]	H_{RAN95} [m]	η_{MN95} ["]	ξ_{MN95} ["]
PIL 5	2599931.281	1132914.775	1778.175	-2.57	-14.53
PIL 6	2599762.000	1132808.448	1778.079	0.04	-12.29
D OUEST	2599536.924	1132640.612	1779.326	3.47	-10.43
PIL 7	2599796.813	1132906.843	1778.284	-0.80	-12.79
PIL 12	2600023.665	1132924.294	1812.450	-2.92	-15.12
PIL 11	2599653.645	1132754.743	1782.963	1.59	-11.38
PIL 15	2599115.430	1132990.628	1788.486	3.14	-6.54
PIL 13	2599887.148	1131478.010	1770.560	5.76	-11.65
PIL 2	2600224.308	1133123.042	1879.777	-4.86	-16.71
PIL 1102	2601596.403	1132915.528	2135.744	-6.77	-16.20
PIL 14	2601253.369	1131940.006	1872.883	-7.40	-18.04
PIL 1	2599507.963	1132577.467	1811.382	4.48	-10.35
PIL 8	2599942.968	1132817.601	1653.784	-0.86	-15.81
PIL 9	2599831.325	1132858.904	1642.257	-0.35	-13.65
RAWYL	2598257.434	1133920.312	1835.489	2.81	-6.22
AUBERGE	2598627.677	1133436.105	1813.516	3.56	-5.89
PIL 16	2599903.596	1133344.809	1789.161	-4.81	-15.51
TUNNELS	2599489.806	1131910.198	1774.021	6.94	-11.56

7.2.2 GNSS-nivellement

Pour rappel, le but du GNSS-nivellement est d'obtenir des observations directes de cotes du géoïde. Cependant, au vu du recul de la zone de travail, aucune altitude orthométrique absolue n'est présente à moins de 10 km. Dans ce cas, il est plutôt question de produire des observations de *différences de cotes du géoïde*. Les détails mathématiques de ce pré-traitement sont présents dans la sous-section 4.2.2.

Traitement des sessions de mesures gravimétriques

La toute première étape lorsque l'on traite des mesures de gravimétrie relative est d'obtenir des valeurs d'accélération de gravité absolues. Pour réaliser cela manuellement :

- Commencer et terminer chaque session de mesure sur le terrain sur le même point de début et de fin, ici la base absolue déportée N16b-REF ;
- Interpoler la session de façon linéaire par rapport au temps afin de compenser le drift ;
- Appliquer la correction à l'air libre de $0.3086 \text{ [s}^{-2}\text{]}$ sur tous les points de mesures reliés au GNSS (free air correction, FAC) avec les hauteurs d'instrument ;
- Additionner la valeur de la gravité de la base absolue avec chaque Δg_i pour toutes les mesures.

Dans certains cas plus complexes, il est tout à fait possible d'estimer ces éléments sous la forme d'un réseau gravimétrique avec un logiciel spécialisé. Il est aussi important de noter qu'ici l'effet des marées est déjà corrigé à l'interne du gravimètre.

Le tableau 7.3 résume, à titre d'exemple, le traitement d'une des quatre sessions de mesure réalisées. Les sessions ne correspondent pas forcément à un cheminement donné, mais simplement à l'obtention d'une valeur de gravité absolue pour chacun des points.

TABLEAU 7.3 – Résumé du traitement de la session gravimétrique du 06.10.2025 après-midi

ID	UTC	Δg [mgal]	Drift [mgal]	h_{instr} [m]	FAC [mgal]	g [mgal]
N16b-REF	11:16:16	4923.3338	0.0000			980230.100
PIL 11 (GNSS)	11:21:22	4922.3053	0.0000	-0.261	0.0805	980229.152
G4	11:37:28	4932.2627	0.0001			980239.029
G10	11:50:30	4941.3039	0.0001			980248.071
PIL 12 (GNSS)	12:14:36	4914.5936	0.0003	1.132	-0.3495	980221.011
N169	12:20:57	4915.1044	0.0003			980221.871
N167	12:27:15	4916.2308	0.0003			980222.998
A1	12:37:47	4918.1590	0.0004			980224.926
N166	12:43:57	4918.8380	0.0004			980225.605
N156I	12:51:36	4919.7703	0.0004			980226.537
N153I	13:02:26	4919.2054	0.0005			980225.972
N151	13:08:59	4920.1079	0.0005			980226.875
N4.1	13:18:41	4922.2026	0.0005			980228.970
A3	13:26:00	4922.3158	0.0006			980229.083
N16b-REF	13:37:58	4923.3331	0.0006			980230.100

Traitement des observations de différences de cotes du géoïde ΔN

Les trois cheminements présentés dans la figure 7.10 ont été choisis pour le GNSS-nivellement. Le tableau 7.4 montre un résumé des résultats du pré-traitement dont les détails mathématiques sont exposés à la section 4.2.2.

Les mesures de dénivelées ellipsoïdales (CH1903+/Bessel) ont été acquises par le bureau « GEO-SAT SA » et traitées par swisstopo avec le logiciel « Bernese GNSS Software ». Les dénivelées usuelles du nivellement géométrique ont également été reprises du bureau « GEOSAT SA ».

Il est important de noter que le cheminement n°3 a été écarté de la détermination car il contient des incohérences dans les dénivelées (voir Δ dans le tableau 7.4). Il peut s'agir, par exemple, d'une mauvaise hauteur d'instrument ou de matérialisation entre le nivellement géométrique et la solution GNSS. Pour information, ces données n'ont pas été acquises dans le cadre de ce travail et n'ont donc pas donné lieu à une recherche de faute approfondie.

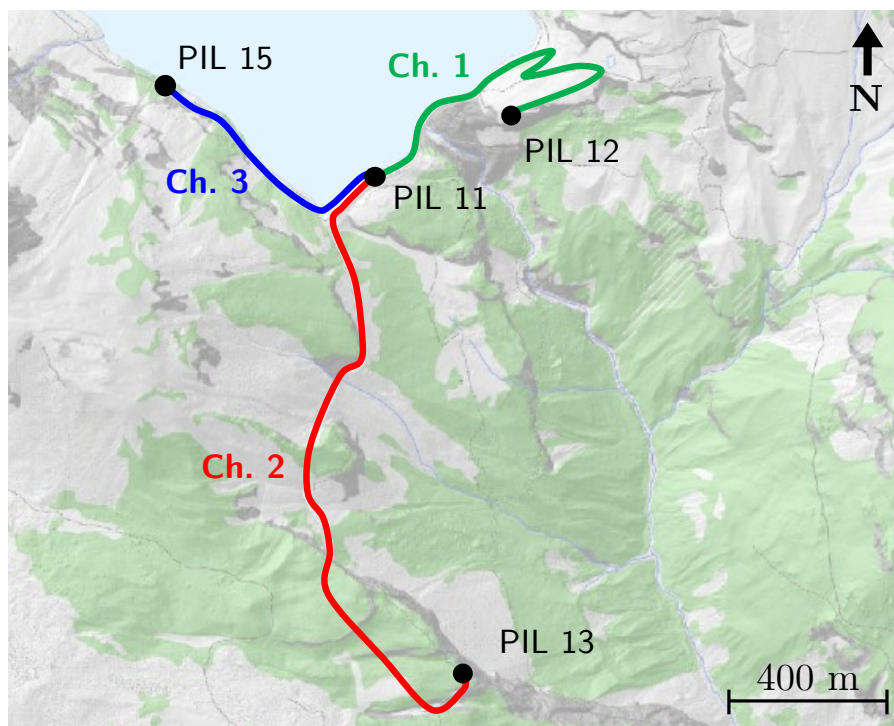


FIGURE 7.10 – Situation des cheminements de GNSS-nivellement

TABLEAU 7.4 – Résumé des résultats du pré-traitement du GNSS-nivellement, avec comparaison au géoïde CHGeo2004

Chem.	ΔH^u [m]	E^{orth} [m]	ΔH^{ortho} [m]	Δh^{ell} [m]	ΔN_{obs} [m]	ΔN_{CH04} [m]	Δ [m]
1	29.4871	-0.0003	29.4868	29.498	+0.0107	0.0114	0.0007
2	-12.4040	-0.0229	-12.4269	-12.470	-0.0431	-0.0523	-0.0092
3	5.5237	0.0140	5.5370	5.561	+0.0237	0.0007	-0.0230

Modèle de masse utilisé

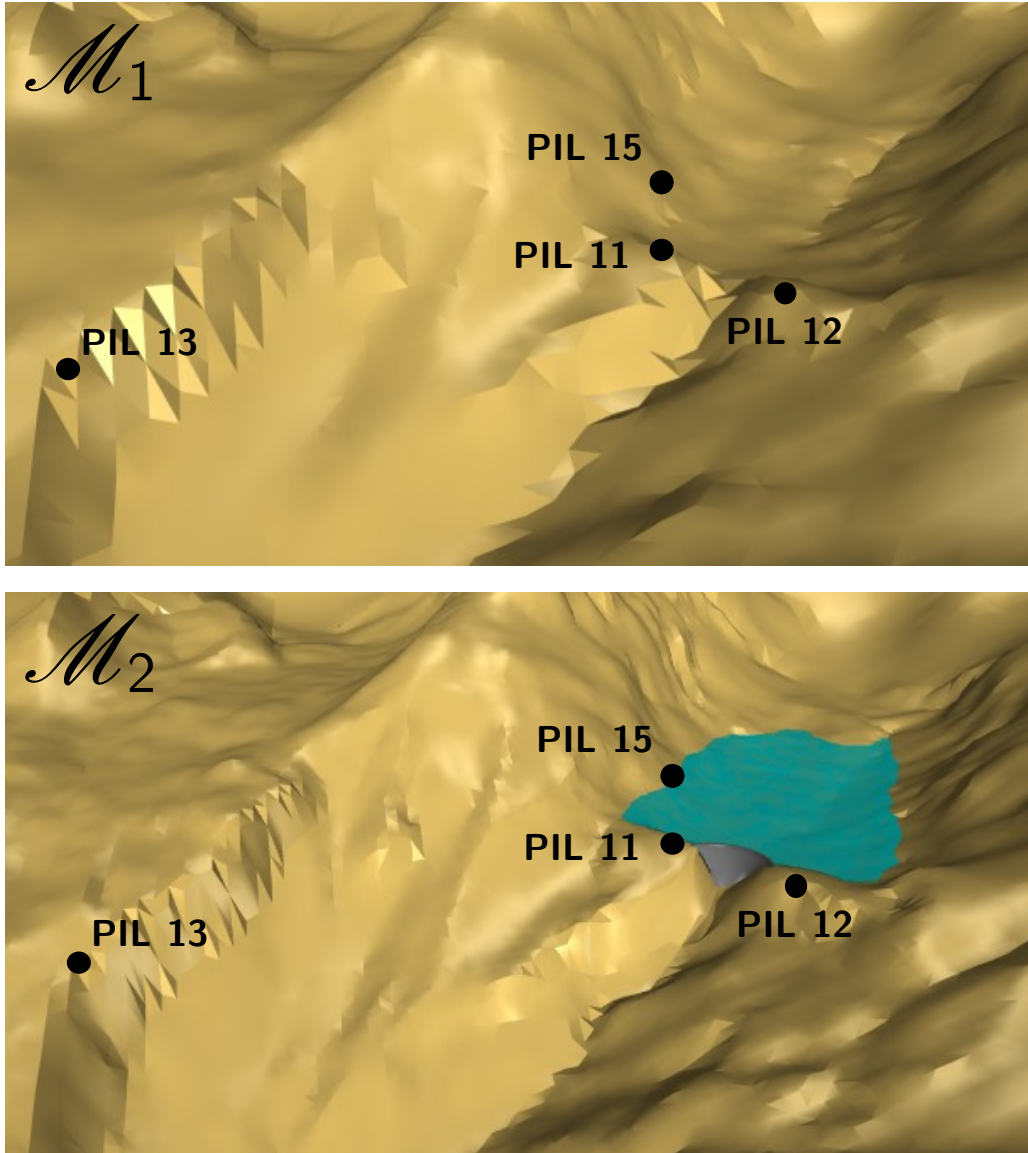
Pour rappel, un modèle de masse est nécessaire au calcul de la gravité moyenne le long de la ligne d'aplomb aux points de départ et d'arrivée d'un cheminement (voir section 4.2.2). Dans ce cadre, trois fonctionnelles du champ gravitationnel généré par un modèle de masse \mathcal{M} sont à déterminer aux deux extrémités du cheminement, à savoir :

- $g_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_{\text{topo}})$: l'accélération gravitationnelle à la surface ($= |\mathbf{g}_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_{\text{topo}})|$) ;
- $\Phi_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_{\text{topo}})$: le potentiel gravitationnel à la surface ;
- $\Phi_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_0)$: le potentiel gravitationnel sur le géoïde.

Le terme $g_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_{\text{topo}})$ étant la première dérivée du potentiel, il se trouve être très sensible aux masses locales. De ce fait, deux cas de figure ont été analysés pour les trois cheminements de GNSS-nivellement. Ils sont présentés dans le tableau 7.5 et la figure 7.11.

TABLEAU 7.5 – Impact du choix d’un modèle de masse sur les observations ΔN

Modèle	Topographie	Barrage	Lac	ΔN_{obs}^1	ΔN_{obs}^2	ΔN_{obs}^3
\mathcal{M}_1	Résolution 50 m	auto 2D+1 (50 m)	vide	+0.0107	-0.0431	+0.0237
\mathcal{M}_2	Résolution 20 m	manuel 3D (0.5 m)	plein	+0.0101	-0.0426	-0.0229


 FIGURE 7.11 – Aperçu des modèles de masse \mathcal{M}_1 (haut) et \mathcal{M}_2 (bas)

Comme on peut le constater, l’impact sur ΔN_{obs} entre les deux modèles sont de l’ordre de 4 à 8 $1/10^6$ de millimètres. Bien que ces différences restent faibles, l’effet d’une modélisation des masses plus réaliste (\mathcal{M}_2) par rapport à une modélisation plus simplifiée (\mathcal{M}_1) est notable, y compris à une échelle très locale. C’est pourquoi le modèle \mathcal{M}_2 a été retenu pour le pré-traitement du GNSS-nivellement final. Les densités utilisées sont les suivantes :

- Topographie générale : $2'670 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$;
- Béton du barrage : $2'400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$;
- Eau du lac : $1'000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

7.3 Détermination du champ de gravité local

7.3.1 Modèle de masse utilisé pour la détermination

Le modèle de masse final utilisé est issu du compromis décrit à la section 3.3 et est semblable à celui utilisé pour le pré-traitement du GNSS-nivellement. Ses caractéristiques principales sont les suivantes (voir figure 7.12) :

- Envergure totale : 140 km ;
- Résolutions croissantes de la topographie en 5 paliers (1'500, 500, 250, 100, 25 [m]) ;
- Densité de la topographie générale : 2'670 kg · m⁻³ ;
- Densité du béton du barrage : 2'400 kg · m⁻³ ;
- Densité de l'eau du lac : 1'000 kg · m⁻³ ;

Le modèle de la topographie générale a dans un premier temps été généré automatiquement à l'aide de l'algorithme présenté au chapitre 3. Il a ensuite été ajusté localement aux abords du barrage, en particulier par l'application d'opérations booléennes permettant de soustraire le volume de l'ouvrage.

Le barrage a également fait l'objet d'une modélisation dédiée, fondée sur les données swiss-SURFACE3D ainsi que sur les plans de l'ouvrage. En raison des surplombs présents, cette représentation repose sur une modélisation pleinement tridimensionnelle, et non sur une approche de type 2D+1.

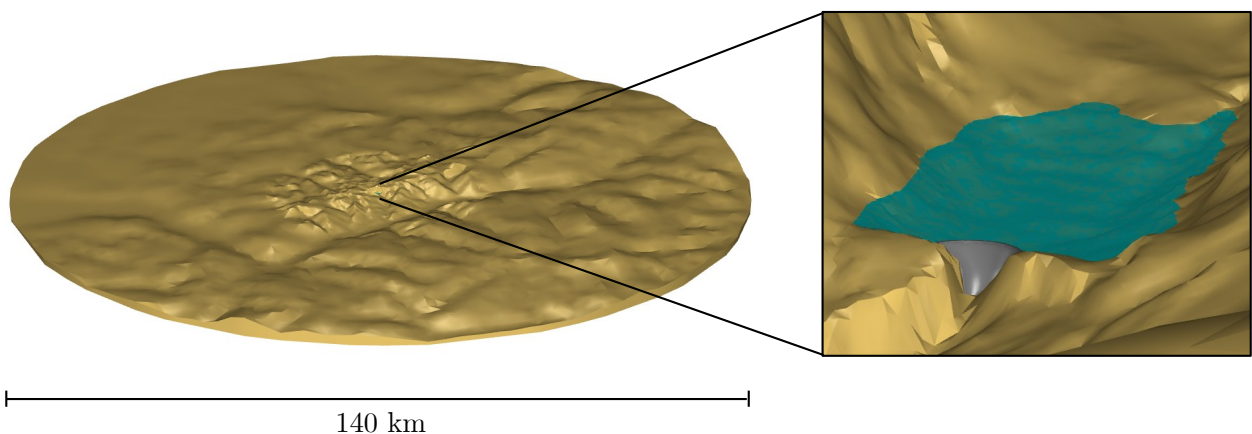


FIGURE 7.12 – Aperçu du modèle de masse choisi pour la détermination des fonctionnelles du champ de gravité local

7.3.2 Intégration dans un modèle régional

Dans le modèle mathématique de la collocation, il est nécessaire de fournir au moins une observation de cote du géoïde pour pouvoir obtenir une solution par moindres carrés. Cette problématique s'apparente à un défaut de datum altimétrique qu'il faut résoudre. C'est pourquoi une seule cote du géoïde CHGeo2004 avec une précision $\sigma_N = 0.0001[\text{mm}]$ a été introduite au

plein centre de la zone. Cette opération permet aussi de pouvoir comparer, après coup, les fonctionnelles du modèle CHGeo2004 à celles estimées dans le cadre de ce travail.

7.3.3 Choix de la fonction de covariance

Comme présenté à la section 4.4.2, l'estimation par collocation requiert la définition d'une fonction de covariance. Dans le cadre de la détermination du géoïde suisse CHGeo2004, la distance caractéristique de corrélation d_{corr} a été fixée à 40 km et le signal moyen d'une cote du géoïde σ_N à 1 m. Compte tenu de l'éloignement des observations du géoïde suisse (10 à 50 km), les longueurs d'onde des signaux détectables (via la fréquence de Nyquist) sont nettement supérieures à celles accessibles dans un modèle local tel que celui de Zeuzier.

Les observations considérées ici étant espacées de quelques dizaines à quelques centaines de mètres, une hypothèse forte est adoptée. Celle-ci consiste à fixer $d_{\text{corr}} = 1000$ m et $\sigma_N = 0.02$ m, afin de mettre en évidence d'éventuels signaux de très courtes longueurs d'onde. Il convient néanmoins de souligner que le choix d'une fonction de covariance constitue un enjeu complexe, pouvant à lui seul faire l'objet de travaux spécialisés.

7.3.4 Solution astro-géodésique pure

Les observations de déviation de la verticale sont exposées à la sous-section 7.2.1. Une précision théorique de $\sigma_\eta = \sigma_\xi = 0.20$ [arcsec] est introduite. Il s'agit d'une valeur usuelle à laquelle s'attendre pour des mesures astro-géodésiques réalisées avec un système comme PyDaedalus et une station totale Leica TS60 (DÉLÈZE, 2024).

Analyse

En résumé, les données principales de la détermination astro-géodésique pure sont les suivantes :

- 18 observations de déviation de la verticale à la surface ($\sigma = 0.2$ ["]);
- 1 cote du géoïde provenant du modèle CHGeo2004 ($\sigma = 0.0001$ [mm]);
- Paramètres de la fonction de covariance : $\sigma_N = 0.02$ [m], $d_{\text{corr}} = 1000$ [m];
- Plan du co-géoïde estimé ($\hat{\mathbf{x}}$) : $\hat{z}_0 = -12.4254$ [m], $\hat{p}_x = -1.97$ ["], $\hat{p}_y = -6.06$ ["];
- Quotient : $s_0/\sigma_0 = 0.92$;
- Temps de calcul : $\approx 1:30$ [min].

Comme l'illustre la figure 7.13, deux signaux principaux peuvent être distingués.

À l'ouest de la zone, un signal d'amplitude comprise entre 1 et 2 mm (couleur bleuâtre) est identifiable. Il est mis en évidence par cinq observations de déviation de la verticale présentant un signal corrélé d'environ 0.5 seconde d'arc, orientées vers le même secteur. Ces masses résiduelles, et donc non-modélisées, ne semblent pas résulter d'une erreur de modélisation de la topographie, mais suggèrent plutôt la présence de contrastes de densité géologiques inférieurs à ceux de la topographie.

Un comportement analogue est observé à l'est de la zone (couleur rougeâtre), où un signal d'amplitude encore plus marquée, de l'ordre de 2 à 3 mm, est détecté. Celui-ci est principalement visible via deux observations de déviation de la verticale présentant des valeurs de signal corrélé d'environ 1.5 secondes d'arc. À l'inverse de la zone à l'ouest, ce signal suggère la présence d'un contraste de densité plus important que celui de la topographie. Cependant, il pourrait être intéressant de réaliser des mesures complémentaires dans ce secteur afin de mieux qualifier cette anomalie.

La figure 7.14 présente le signal total estimé $\hat{\mathbf{z}}$. Il est facilement observable que la partie déterministe $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$ est largement pré-dominante par rapport à la partie du signal corrélé $\hat{\mathbf{s}}$ (pour rappel : $\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{s}}$).

Le bruit non-corrélé $\hat{\mathbf{n}}$ montre un comportement attendu (figure 7.15). Il se caractérise par des valeurs inférieures à la précision des observations (0.2 secondes d'arc) ainsi que par des directions globalement bien réparties. Par conséquent, aucun signal résiduel ne semble être encore présent.

Bien que la figure 7.16 donne un indicateur de précision absolue sur la cote du co-géoïde, celui-ci dépend fortement de la fonction de covariance utilisée. Toutefois, cette précision est spatialement cohérente et attendue dans la mesure où :

- elle est très bonne à proximité directe de l'unique observation de cote du géoïde (centre de la zone) provenant du modèle CHGeo2004,
- les observations de déviation de la verticale la « propagent » selon la fonction de covariance.

Les fonctionnelles estimées et restaurées sont présentées dans la figure 7.17. Par définition, les déviations de la verticale à la surface topographique ne correspondent pas exactement à la plus grande pente du géoïde.

Finalement, la figure 7.18 fournit quant à elle les différences entre le modèle suisse CHGeo2004 (MARTI, 2016) et la détermination finale de la solution astro-géodésique. Concernant la cote du géoïde, les écarts observés varient entre 0 et +7 mm, tandis que pour la déviation de la verticale, les différences peuvent atteindre jusqu'à 1 arcsec. Ces petites différences peuvent s'expliquer par plusieurs facteurs :

- Le modèle de masse diffère (résolution, eau des petits lacs, croûte terrestre, etc.) ;
- Les observations du CHGeo2004 sont bien plus espacées et les signaux détectables ont de bien plus grandes longueurs d'onde (10 à 30 km) ;
- Les paramètres de la fonction de covariance du modèle suisse sont bien différents : $d_{\text{corr}}^{\text{CH04}} = 40'000$, $\sigma_N^{\text{CH04}} = 1.0$ [m] contre $d_{\text{corr}} = 1'000$, $\sigma_N = 0.02$ [m] ici ;
- La solution du géoïde suisse intègre en plus des observations de GNSS-nivellement et de perturbations de gravité sur tout le territoire national et frontalier ;

Sur la même figure, il est aussi possible de discerner la tendance générale produite par les signaux corrélés illustrés dans la figure 7.13.

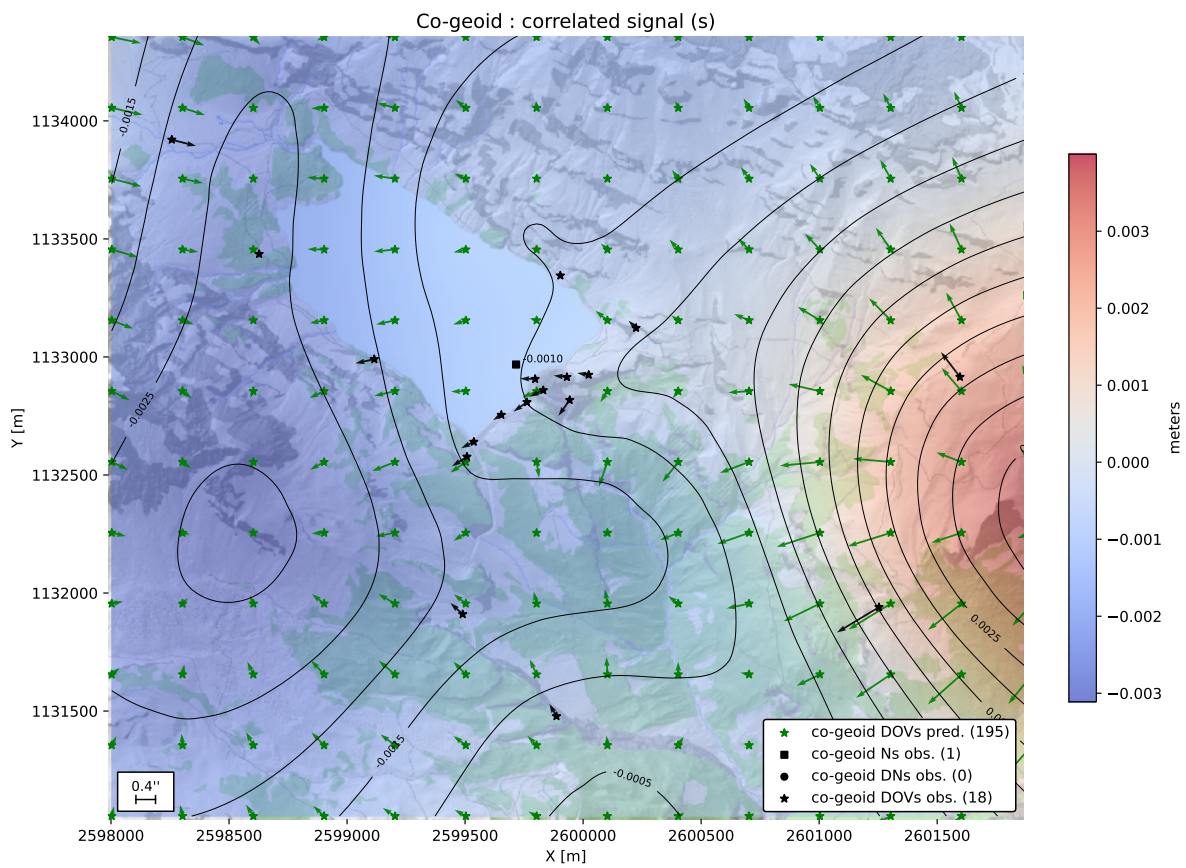


FIGURE 7.13 – Solution astro-géodésique : signal corrélé \hat{s} (co-géoïde)

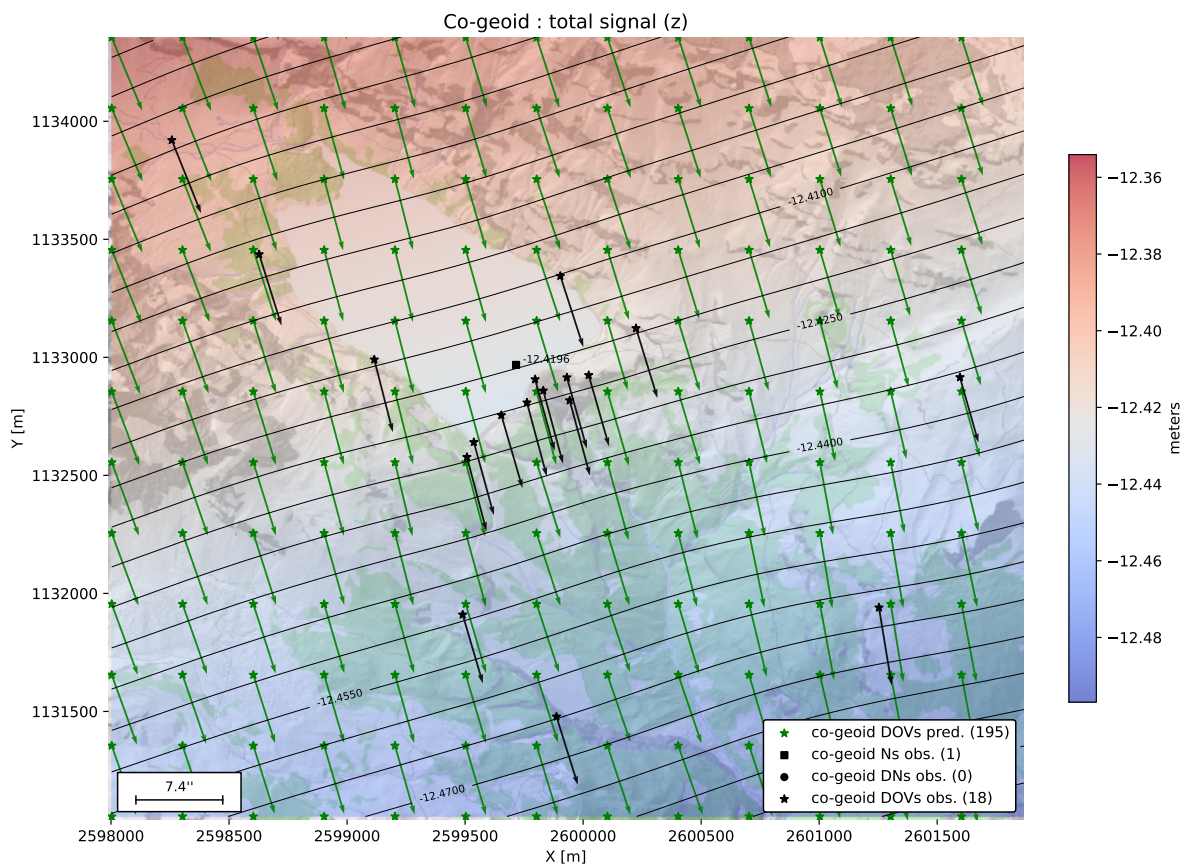


FIGURE 7.14 – Solution astro-géodésique : signal total \hat{z} (co-géoïde)

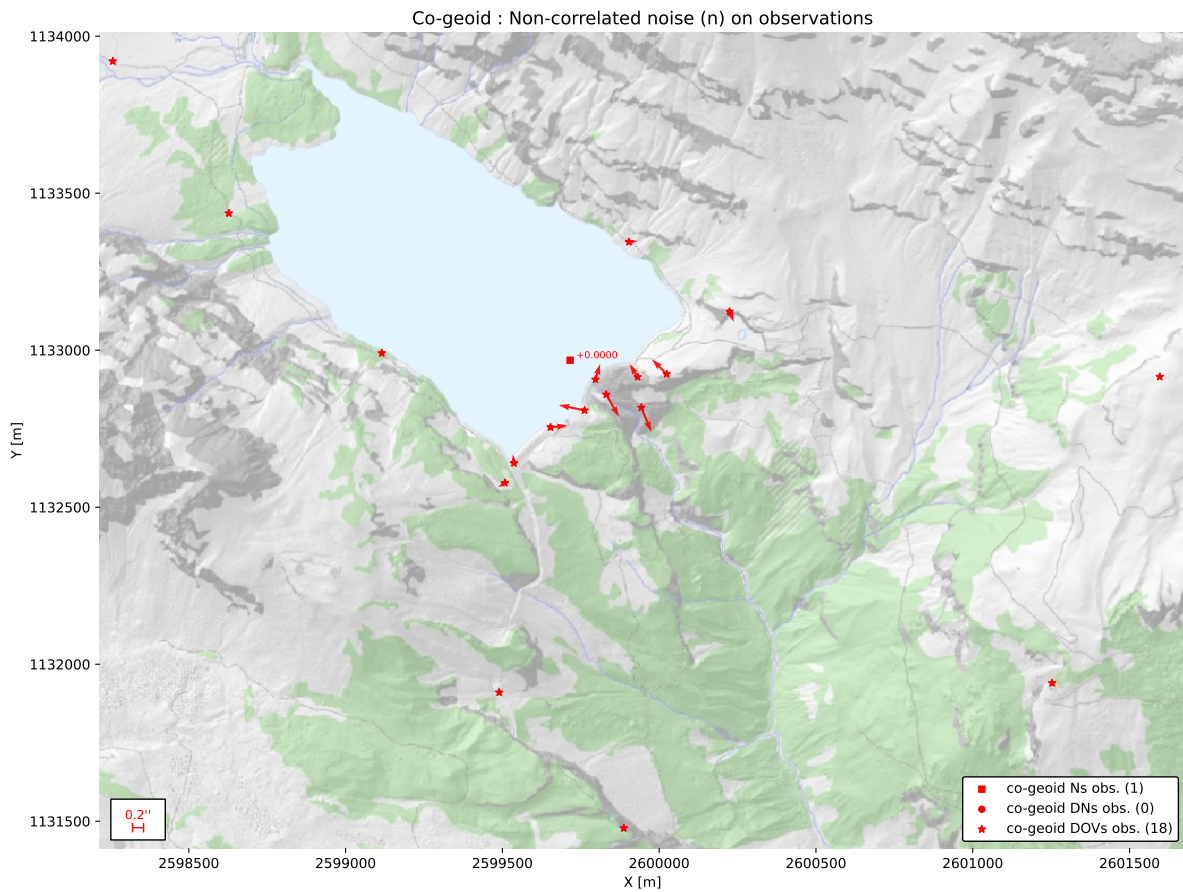
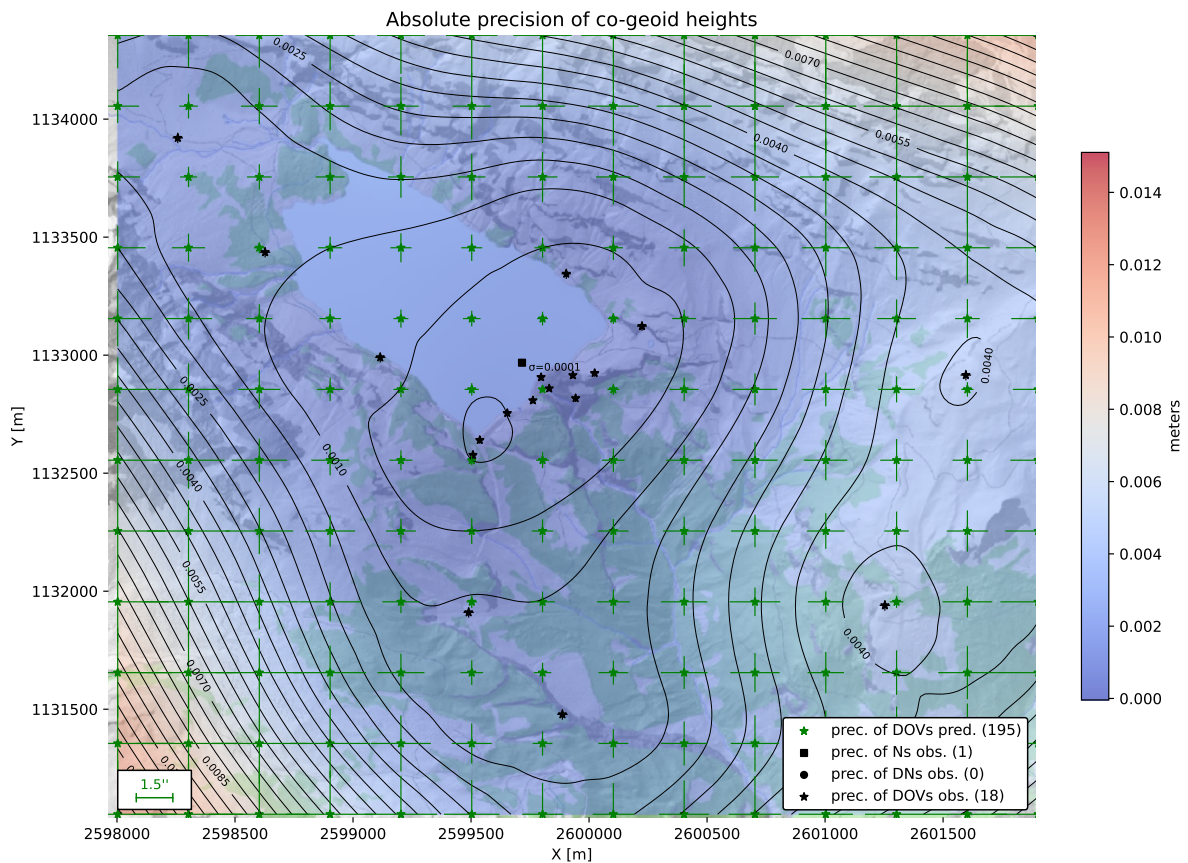
FIGURE 7.15 – Solution astro-géodésique : bruit non corrélé \hat{n} (co-géoïde)

FIGURE 7.16 – Solution astro-géodésique : précision absolue du co-géoïde

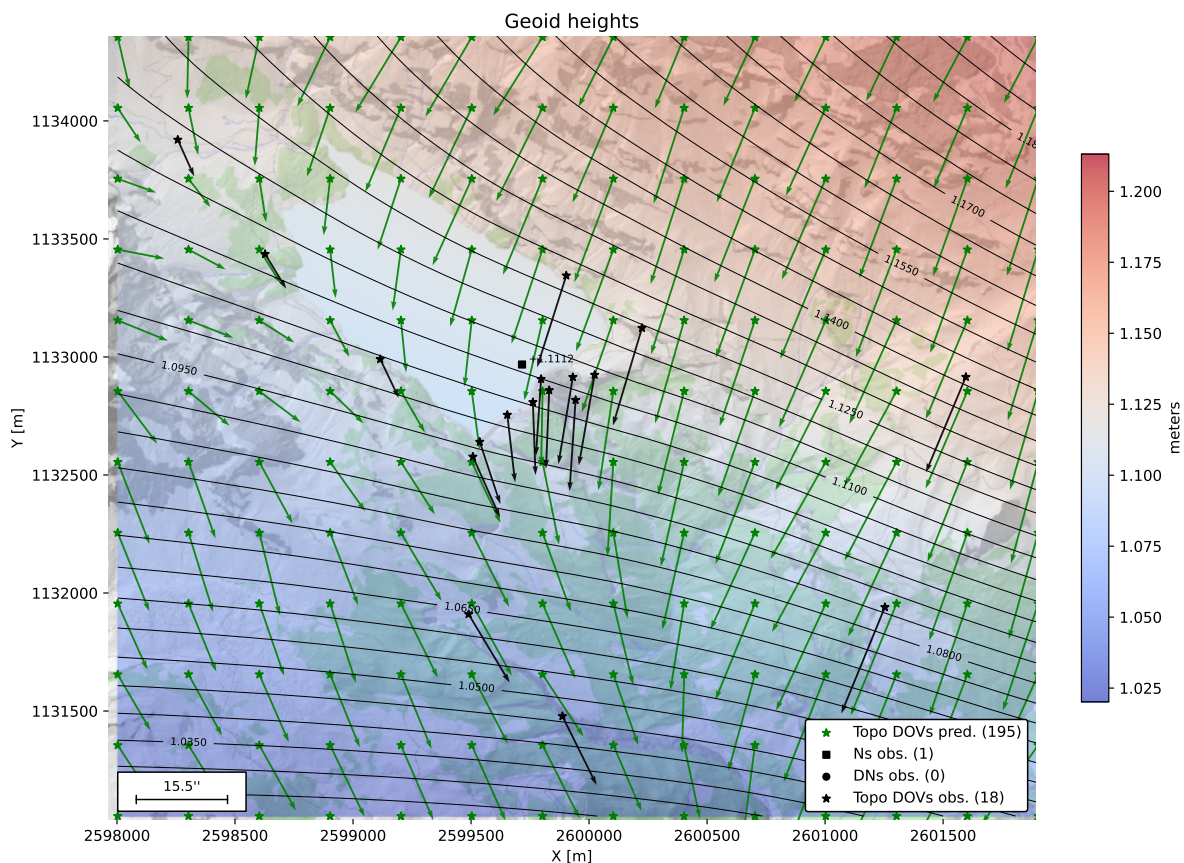


FIGURE 7.17 – Solution astro-géodésique : géoïde final et déviation de la verticale à la surface

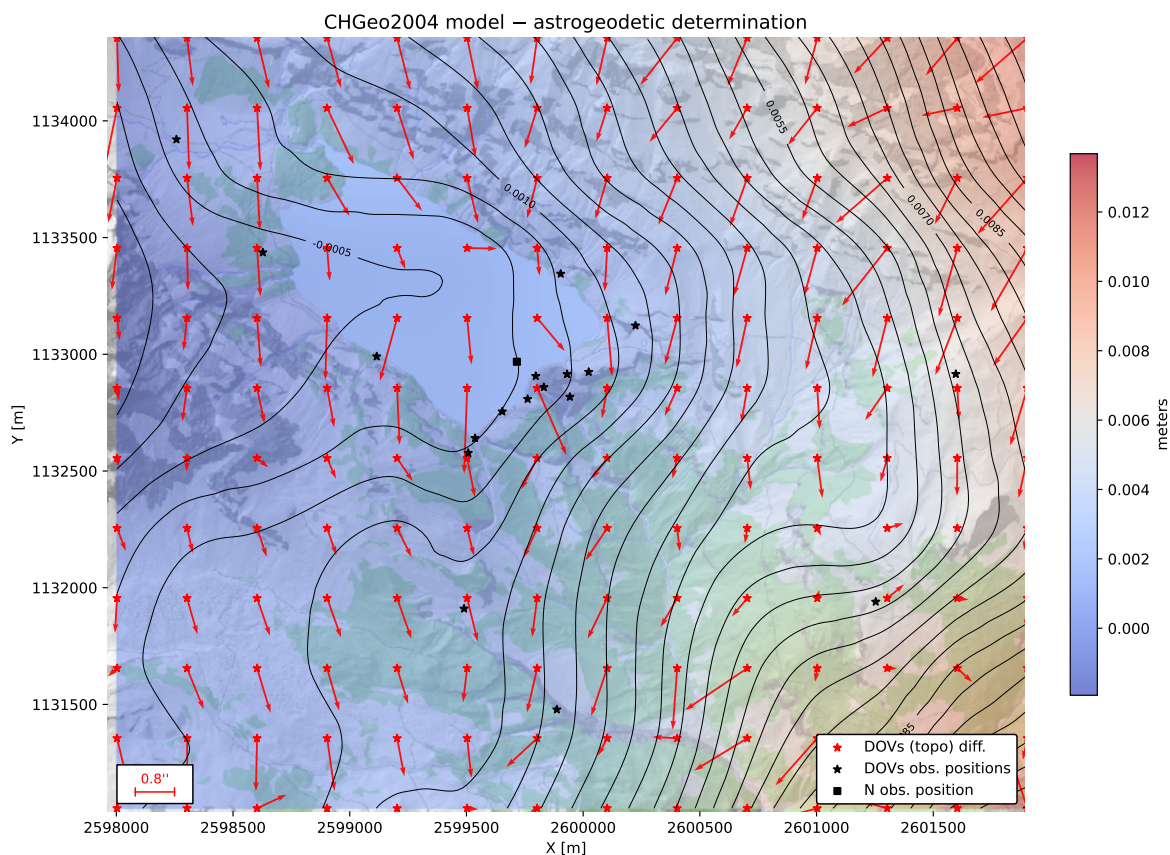


FIGURE 7.18 – Solution astro-géodésique : différence entre le modèle suisse CHGeo2004 et le géoïde final estimé (géoïde et déviation de la verticale à la surface).

7.3.5 Solution astro-géodésique combinée au GNSS-nivellement

Selon les pré-traitements exposés à la sous-section 7.2.2, seulement 2 observations de GNSS-nivellement sont à disposition. Ce nombre étant faible, il n'est pas vraiment possible de les traiter sans les observations de déviation de la verticale. C'est pourquoi une solution combinée est brièvement décrite dans la présente sous-section.

Analyse

En résumé, les données principales de la détermination combinée sont les suivantes :

- 18 observations de déviation de la verticale à la surface ($\sigma = 0.2$ ["]);
- 2 observations de différences de cotes du géoïde ($\sigma = 0.002$ [mm]);
- 1 cote du géoïde provenant du modèle CHGeo2004 ($\sigma = 0.0001$ [mm]);
- Paramètres de la fonction de covariance : $\sigma_N = 0.02$ [m], $d_{\text{corr}} = 1000$ [m];
- Plan du co-géoïde estimé ($\hat{\mathbf{x}}$) : $\hat{z}_0 = -12.4254$ [m], $\hat{p}_x = -1.95$ ["], $\hat{p}_y = -6.16$ ["];
- Quotient : $s_0/\sigma_0 = 1.27$;
- Temps de calcul : $\approx 1:30$ [min].

La figure 7.19 présente les différences par rapport à la solution astro-géodésique. Visuellement, la variation la plus marquée apparaît sur l'un des aboutissants d'un cheminement de GNSS-nivellement (pilier n°13). La figure 7.20 met en évidence, à cette même position, un signal corrélé significatif de l'ordre de 2 à 3 mm, absent dans la solution astro-géodésique.

Cette différence sur le signal corrélé peut s'expliquer par la présence d'une faute ou d'une imprécision mal modélisée dans l'observation de GNSS-nivellement, la rendant incompatible avec les observations astro-géodésiques, plus nombreuses. Le bruit non-corrélé présenté à la figure 7.21 va dans le même sens, en montrant un résidu de 8.9 mm sur l'observation de différence de cotes du géoïde associée au pilier n°13. Il convient toutefois de rappeler que cette analyse dépend fortement du choix des paramètres de la fonction de covariance, lesquels peuvent également engendrer d'autres types de différences.

Pour ces raisons, la solution astro-géodésique pure, basée sur de nombreuses observations, est privilégiée pour une zone d'aussi faible envergure. Ce constat est toutefois très probablement différent à l'échelle d'une région étendue ou d'un pays comme la Suisse, où le GNSS-nivellement constitue une composante importante de la détermination d'un champ de gravité régional (MARTI, 2016).

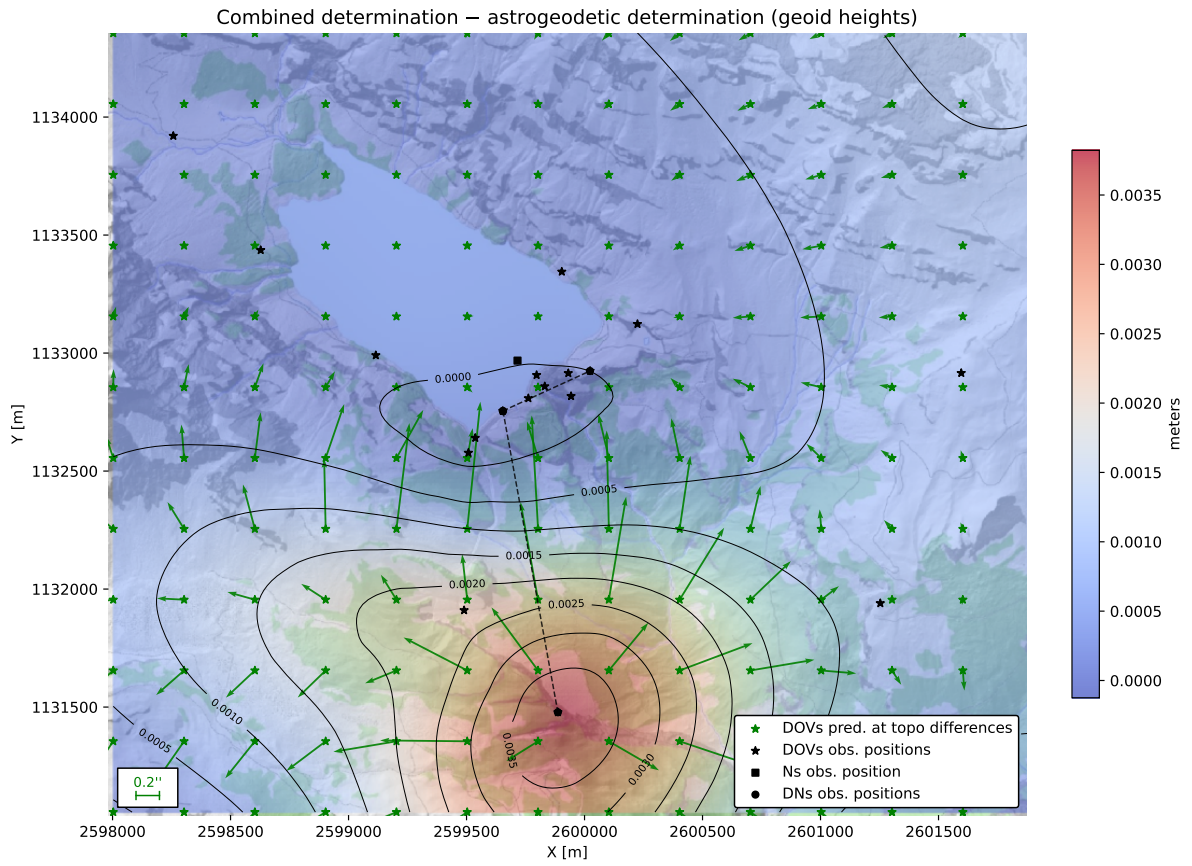


FIGURE 7.19 – Solution combinée : différence avec la solution astro-géodésique pure (restorée)

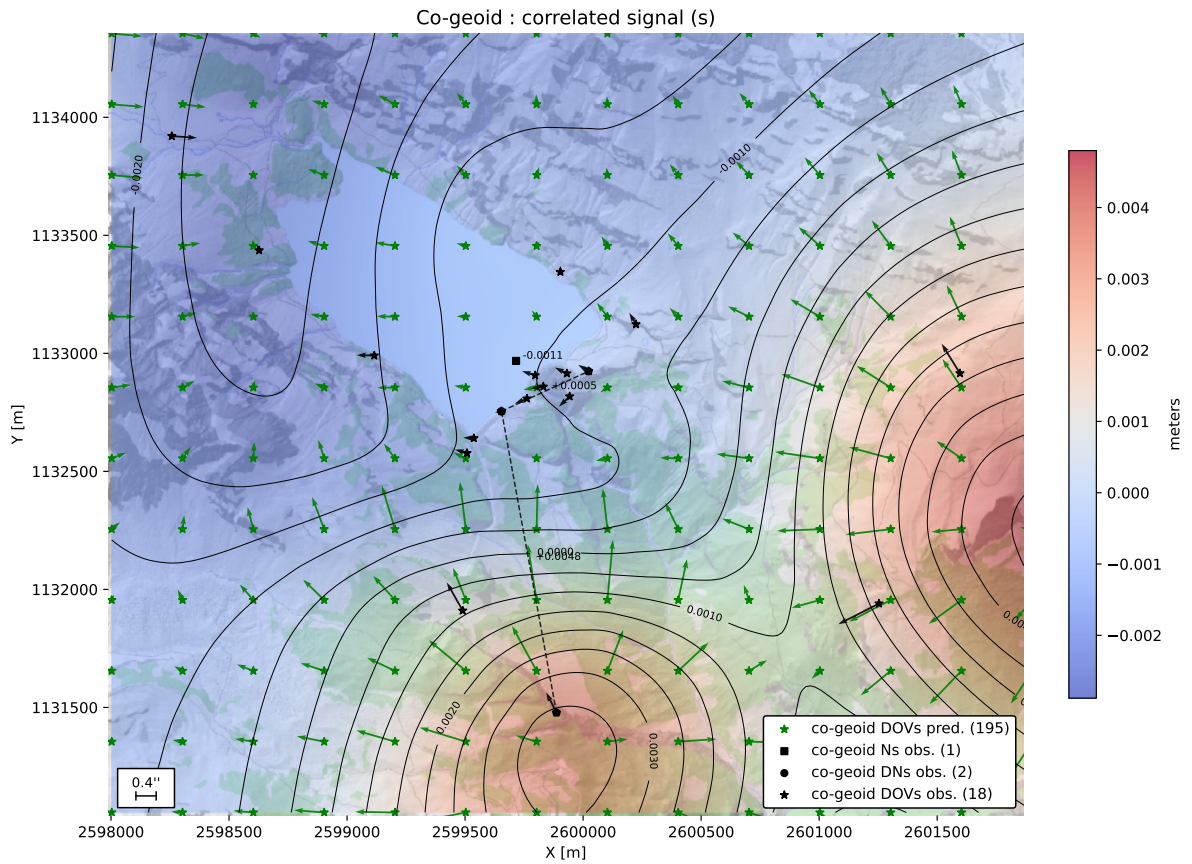


FIGURE 7.20 – Solution combinée : signal corrélé \hat{s} (co-géoïde)

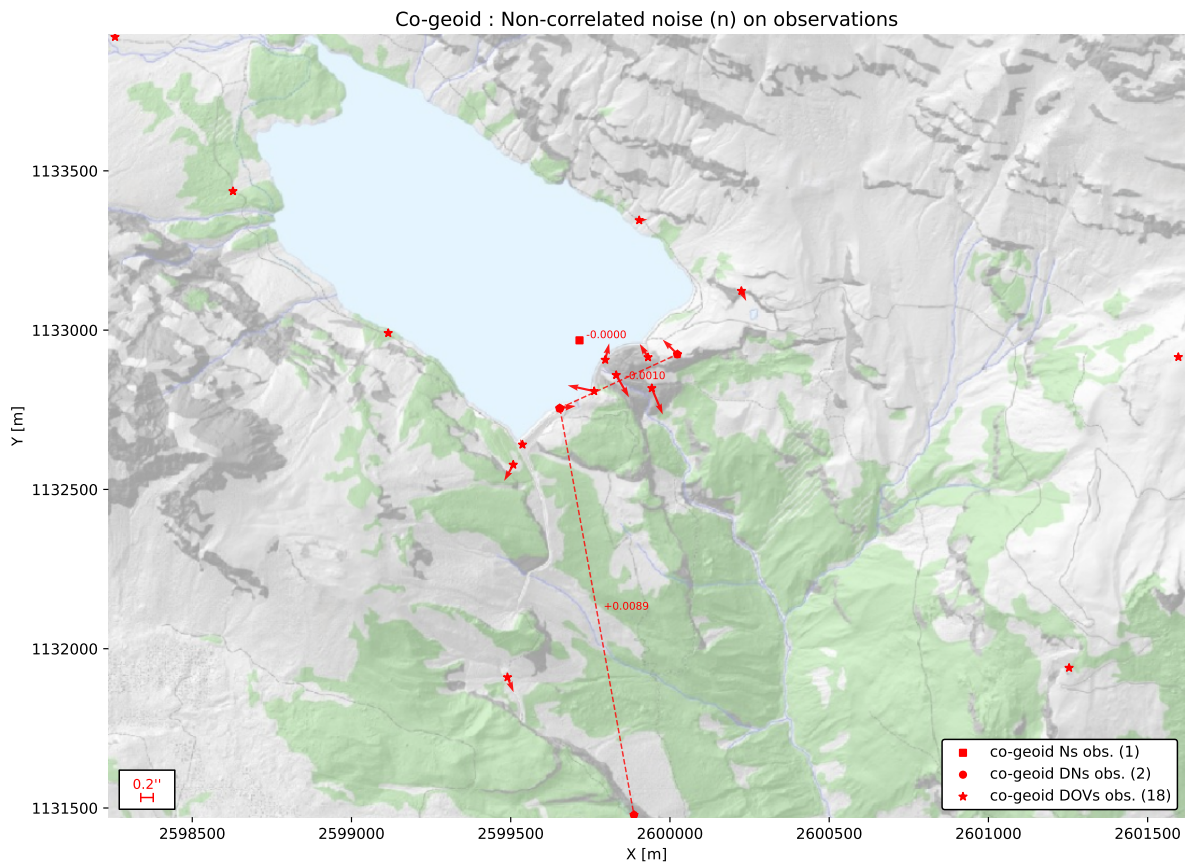


FIGURE 7.21 – Solution combinée : bruit non corrélé \hat{n} (co-géoïde)

7.3.6 Impact du niveau du lac

Toute la campagne de mesure (et donc la détermination du champ de gravité local) a été réalisée avec le lac artificiel de Zeuzier presque plein (≈ 1773 m). De ce fait, même si le lac n'était pas modélisé, certains des effets gravitationnels générés par la masse d'eau pourraient être visibles à travers les observations.

Dans cette sous-section, la question suivante est posée :

« Lors d'une campagne de surveillance géodésique du barrage, quel est l'impact d'un lac plein sur les fonctionnelles N , η et ξ utilisées comme corrections des mesures géodésiques ? »

Afin d'y répondre, il suffit d'évaluer le champ gravitationnel généré par le volume d'eau du lac en certaines positions du réseau géodésique. Les effets produits sont visibles dans la figure 7.22.

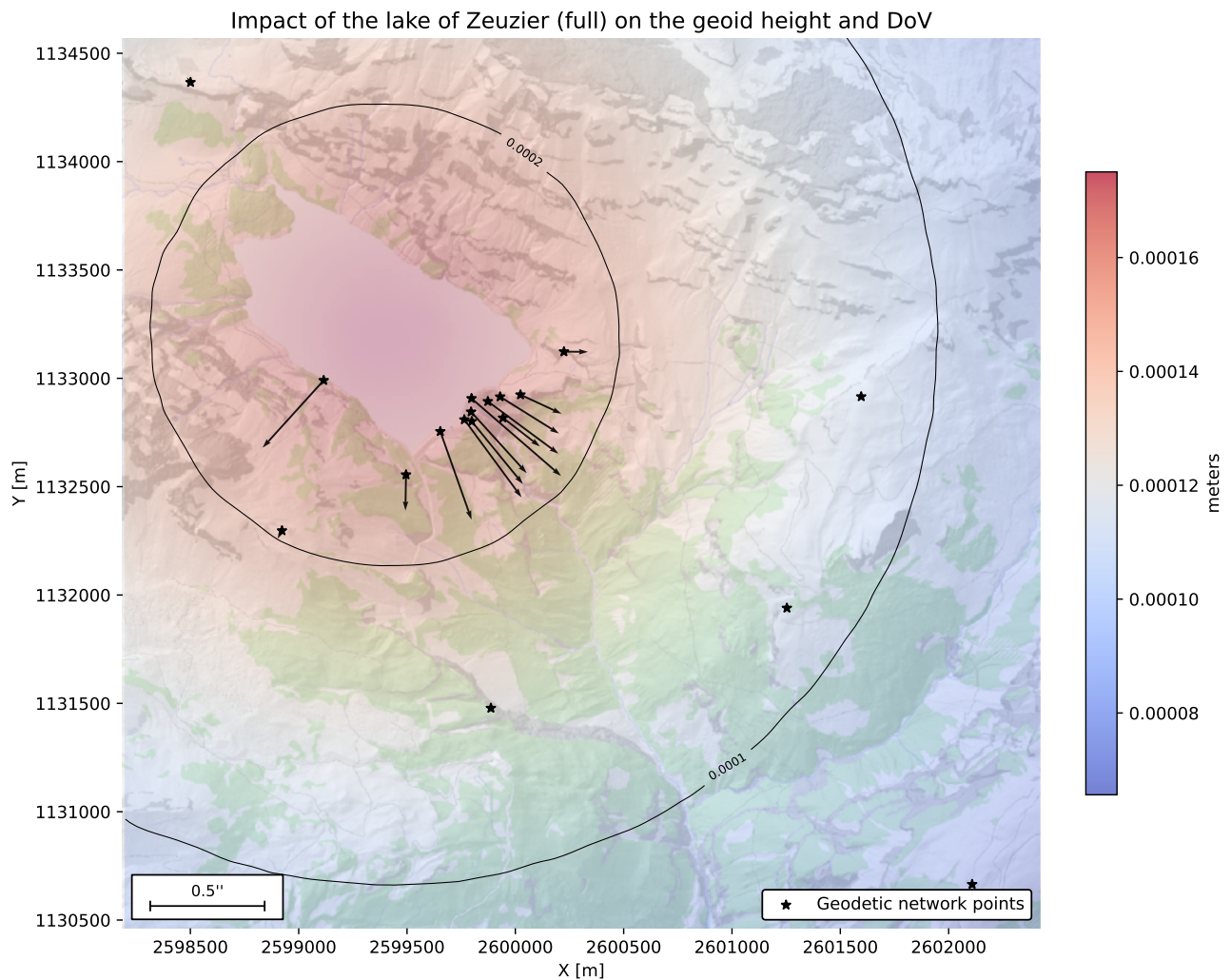


FIGURE 7.22 – Effets générés par le lac de Zeuzier (plein) sur les fonctionnelles du champ de gravité. Les positions évaluées sont certains points du réseau géodésique.

Les cotes du géoïde ne sont que très faiblement affectées par le niveau du lac. L'ordre de grandeur de l'effet observé se situe entre 0.10 et 0.15 mm, ce qui reste négligeable au regard de la précision atteignable pour une dénivelée ou une altitude déterminée par une session GNSS. Cet impact peut donc être considéré comme négligeable.

Cependant, concernant la déviation de la verticale à la surface, l'impact aux abords immédiats du lac atteint environ 0.4 à 0.5 [arcsec]. À titre de comparaison, la précision angulaire d'une station totale moderne peut atteindre 0.5 [arcsec]. Bien que cet effet demeure faible numériquement, la variation directionnelle de la déviation tout autour du lac implique que son influence sur certaines observations topométriques pourrait être significative.

Le lac de Zeuzier présente un volume maximal d'environ $50 \cdot 10^6$ [m³] et engendre déjà des effets faiblement mesurables. Dans le cas d'un lac artificiel de plus grande envergure, tel que celui de la Dixence et ses $400 \cdot 10^6$ [m³], ces effets seraient nettement plus marqués.

7.4 Simulations en circuit fermé

Cette section a pour but de démontrer un exemple réaliste d'utilisation des deux types de simulation présentées dans le chapitre 5. Concrètement, il s'agit de qualifier la précision de certains éléments de la détermination du champ de gravité local exposés dans la section précédente.

7.4.1 Génération procédurale des contrastes de densité

La première étape consiste à générer des contrastes de densité, considérés comme des masses non-modélisées. Les développements mathématiques détaillant ce procédé sont présentés à la section 5.1.

Les principales caractéristiques de cette génération procédurale, ainsi que les paramètres retenus, sont synthétisées dans le tableau 7.6. L'une des réalisations issues de ce processus est illustrée à la figure 7.23.

Les considérations géologiques ayant guidé le choix de ces paramètres ont été volontairement simplifiées. Elles sont posées comme des hypothèses de travail et visent avant tout à fournir un cadre cohérent.

Paramètre	Description	Valeur	Unité
n	Nombre de réalisations	100	-
h	Côté d'un voxel	150	m
R	Rayon de la génération	3 000	m
c_x, c_y	Centre de la génération	2 599 825, 1 132 875	m
L_x, L_y, L_z	Longueurs de corrélation	1000, 1000, 500	m
$\sigma_{\delta\rho}$	Ecart-type d'un contraste de densité	200	kg·m ⁻³
N_{oct}, p	Octaves et persistance	8, 0.5	-

TABLEAU 7.6 – Paramètres utilisés pour la génération procédurale des 100 réalisations de contrastes de densité (via bruit de Perlin)

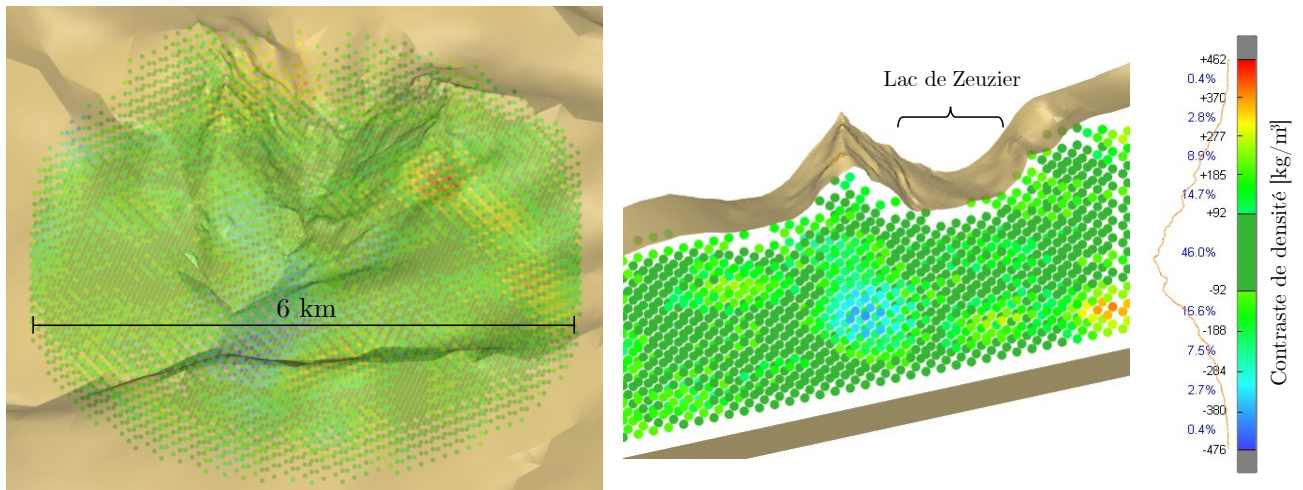


FIGURE 7.23 – Différentes vues d'une réalisation de la génération de contrastes de densités

7.4.2 Précision de la correction orthométrique

La toute première application est celle de la qualification du pré-traitement du GNSS-nivellement. Il s'agit ici d'utiliser le simulateur associé à la correction orthométrique E_{SAB}^{corr} pour les deux cheminements retenus (voir sous-section 7.2.2 et figure 7.10).

Le premier cheminement (PIL 11 \rightarrow PIL 12), d'une longueur de 900 m, présente un écart-type d'environ 1 mm selon la figure 7.24. Cette valeur de précision semble effectivement réaliste, notamment au vu de la faible longueur du chemin. Dans le cas du cheminement PIL 11 \rightarrow PIL 13 d'une longueur de 2 km, l'écart-type des différences est situé à environ 2 mm, ce qui semble tout aussi cohérent. Tous deux ne présentent pas de biais systématiques visibles au vu de la moyenne des différences qui est centrée sur 0. Dans ce cas, le RMS correspond à l'écart-type.

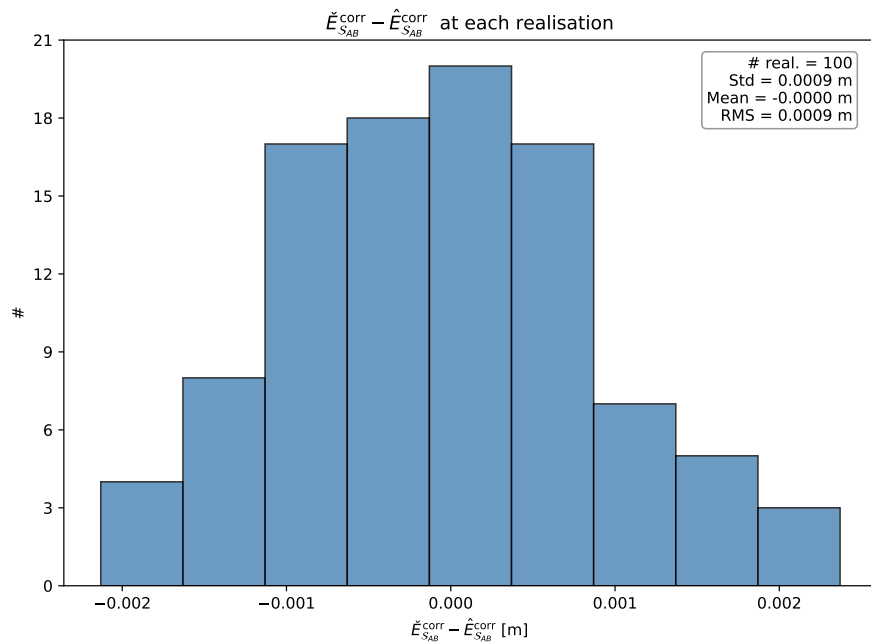


FIGURE 7.24 – Cheminement PIL 11 → PIL 12 : différences entre la correction orthométrique « vraie » et estimée, pour 100 réalisations

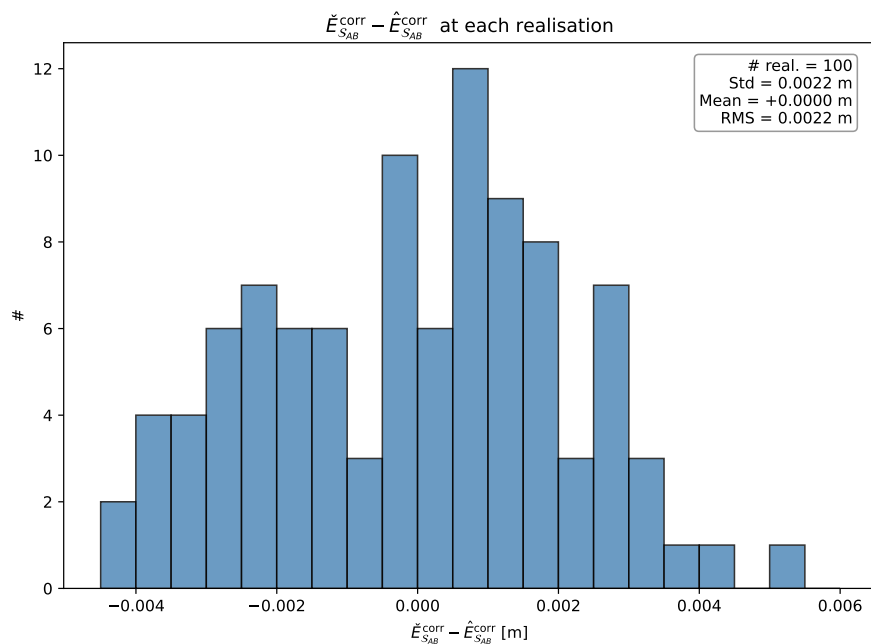


FIGURE 7.25 – Cheminement PIL 11 → PIL 13 : différences entre la correction orthométrique « vraie » et estimée, pour 100 réalisations

7.4.3 Précision des fonctionnelles du champ de gravité local

La qualification des fonctionnelles estimées du champ de gravité constitue un élément central du présent travail. Pour rappel, la simulation vise donc à qualifier la capacité d'un système à pouvoir détecter les effets produits par des masses non-modélisées

Dans un premier temps, cette démarche est appliquée au système d'observations effectivement réalisé sur le terrain. Dans un second temps, l'analyse est étendue à un système d'observations fictif et moins coûteux de manière analogue à une pré-analyse de réseau géodésique. Ceci vise à optimiser la configuration et le nombre d'observations afin d'atteindre des objectifs de précision satisfaisants.

Solution astro-géodésique pure

Le système d'observation est celui utilisé pour la solution finale de la détermination présentée dans la section 7.3 ci-dessus.

La figure 7.26 montre un écart-type attendu sur la cote du géoïde allant de 0.5 à 1.5 mm à l'intérieur de la zone de travail. Quant à la déviation de la verticale, l'écart-type ne dépasse pas 0.3 secondes d'arc dans la même emprise. Ces précisions témoignent de la forte capacité du système d'observation à détecter les effets produits par des masses non-modélisées.

Les histogrammes des figures 7.27, 7.28 et 7.29 montrent l'ordre de grandeur général des différences sur toutes les positions de prédiction. La valeur de la moyenne de ces différences est très proche de 0, ce qui indique l'absence de biais majeur. Dans ce cas précis, le RMS est donc équivalent à l'écart-type. La figure 7.30 permet de faire le même constat, mais spatialement.

Cette simulation permet également de produire des indicateurs de précision relative entre deux positions. Les figures 7.31, 7.32 et 7.33 présentent deux cas illustratifs. Le premier montre que, pour deux points éloignés, l'écart-type des différences relatives atteint environ 2 mm. Le second met en évidence que, malgré une précision absolue de plusieurs millimètres, la précision relative est de l'ordre de 0.4 mm pour deux positions proches. Un résultat analogue pourrait être observé pour la déviation de la verticale, mais n'est pas présenté ici.

L'ordre de grandeur des écarts-types (absolus et relatifs) cités est inférieur à la précision des instruments géodésiques usuels. Par conséquent, les valeurs des fonctionnelles estimées peuvent être utilisées sans grande restriction pour corriger des observations terrestres et GNSS.

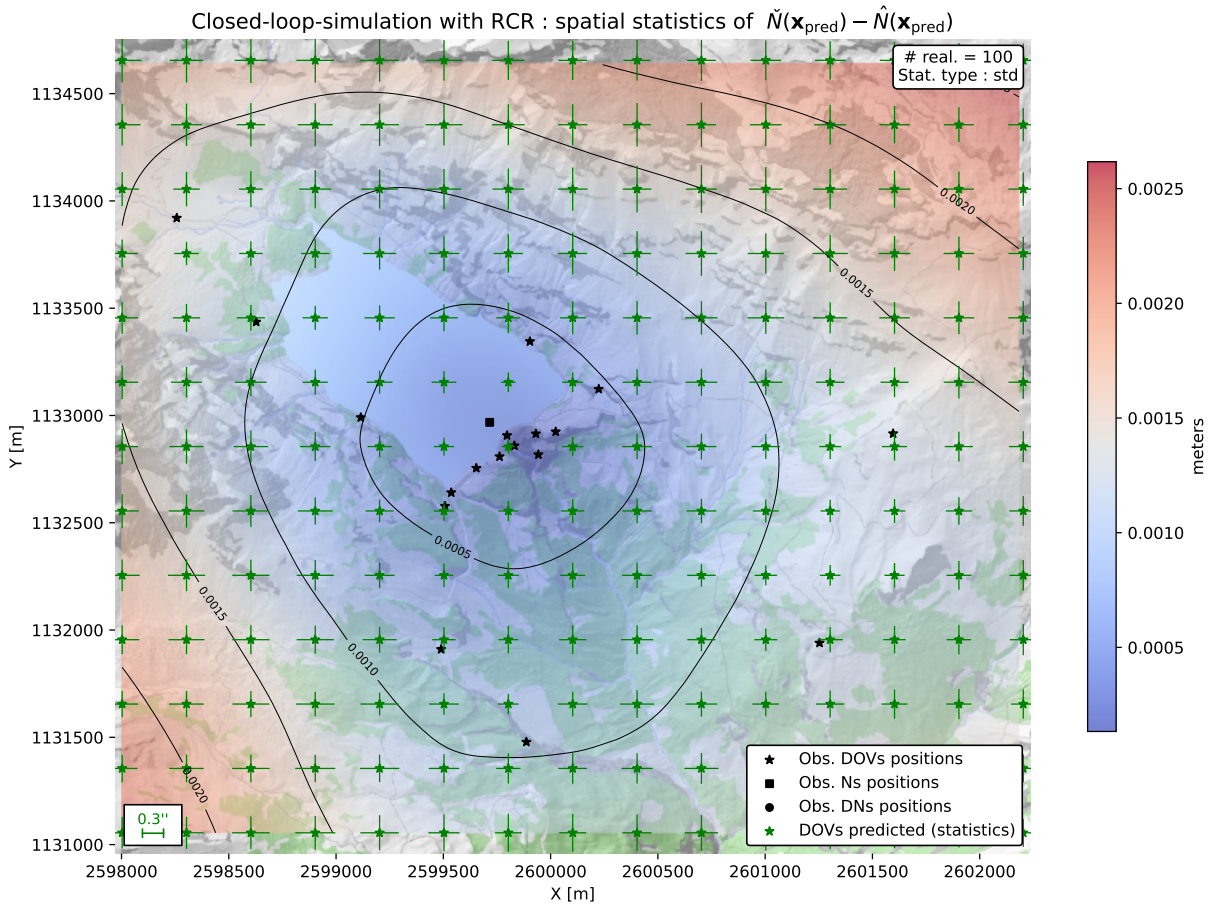


FIGURE 7.26 – Carte de l'écart-type (std) des différences entre les fonctionnelles « vraies » et estimées (cote du géoïde et déviation de la verticale) lors de 100 réalisations

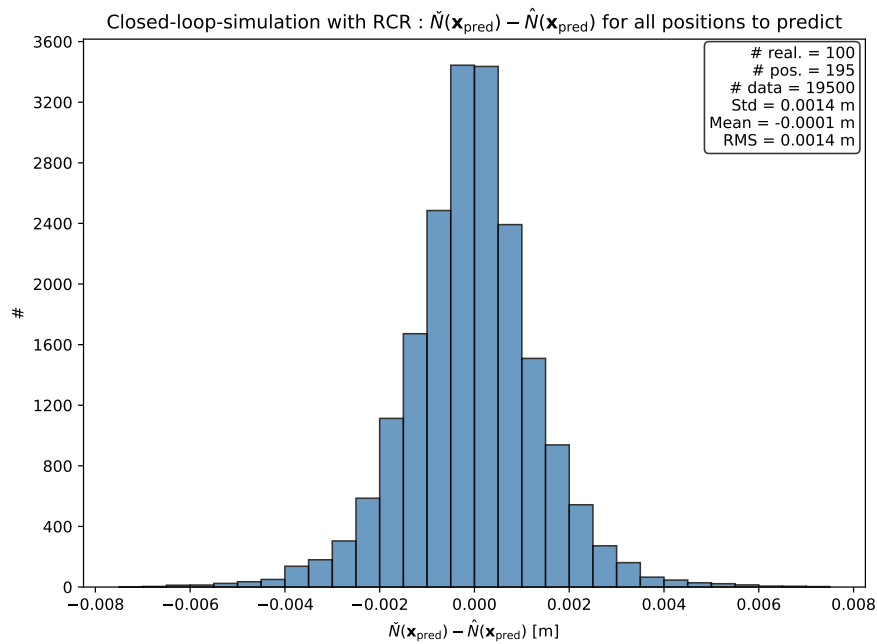


FIGURE 7.27 – Histogramme des différences entre la cote du géoïde « vraie » et estimée lors de 100 réalisations

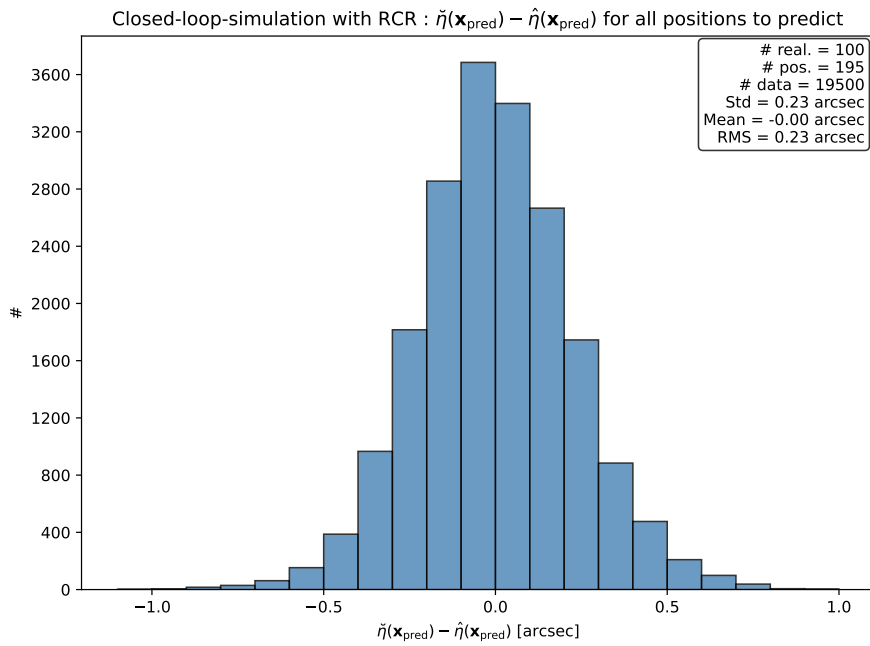


FIGURE 7.28 – Histogramme des différences entre la composante est-ouest de la déviation de la verticale « vraie » et estimée lors de 100 réalisations

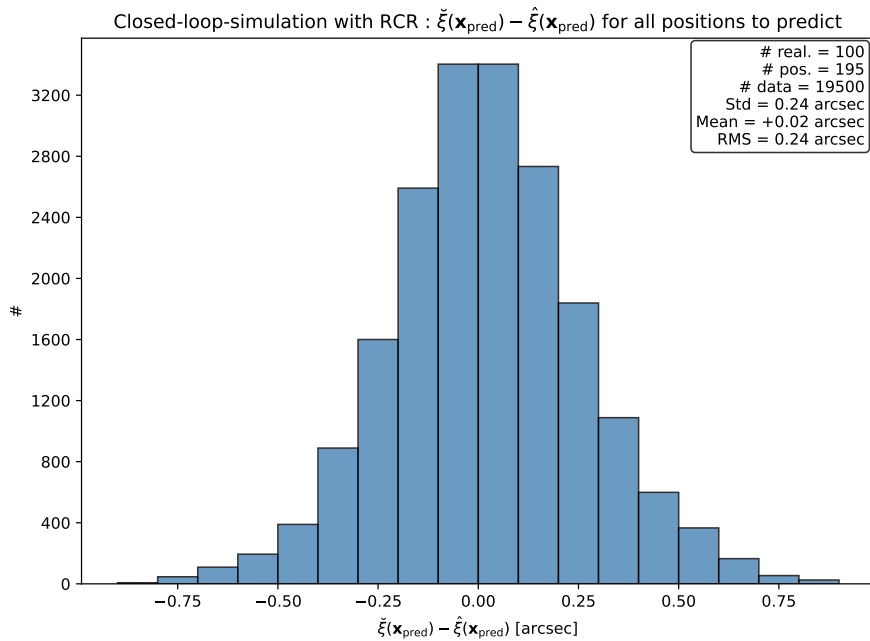


FIGURE 7.29 – Histogramme des différences entre la composante nord-sud (ξ) de la déviation de la verticale « vraie » et estimée lors de 100 réalisations

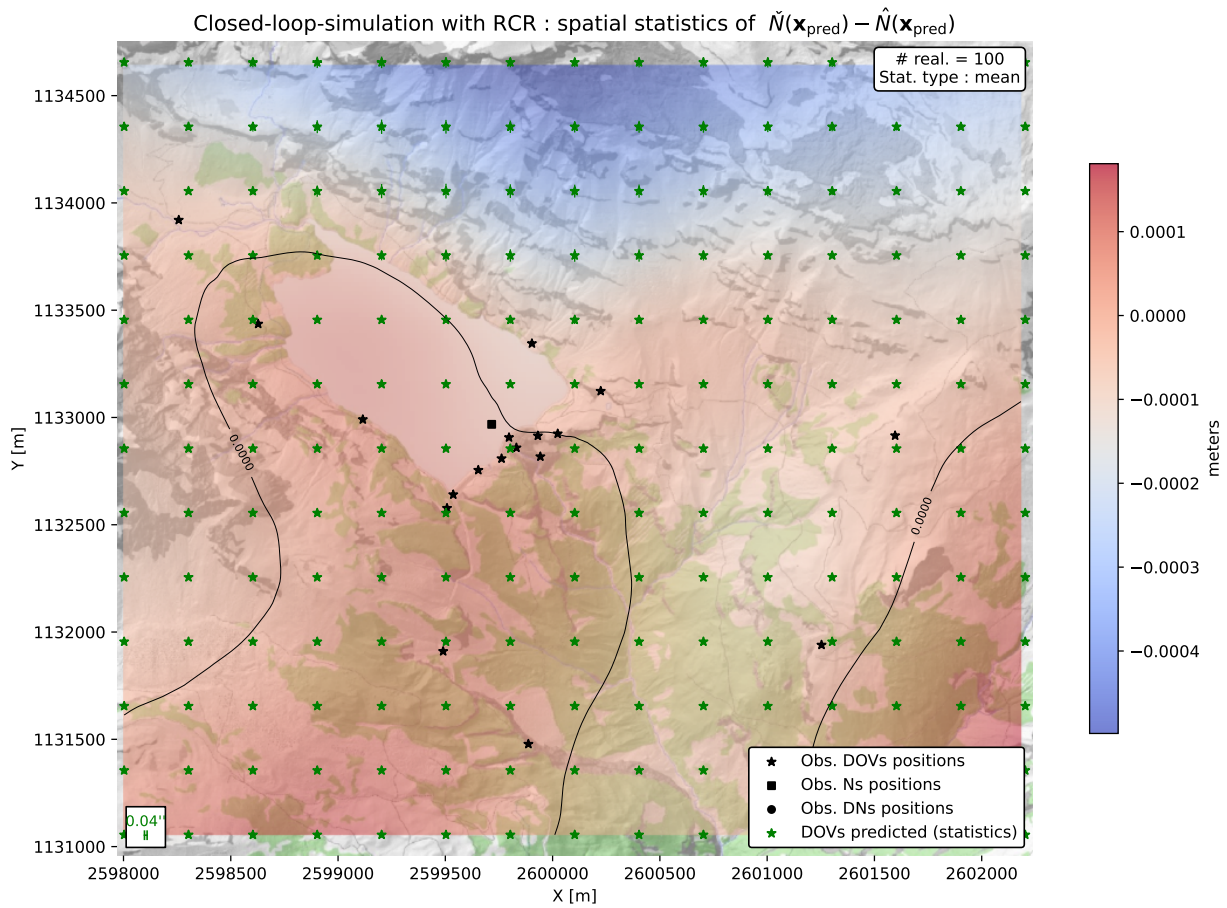


FIGURE 7.30 – Carte de la moyenne (mean) des différences entre les fonctionnelles « vraies » et estimées (cote du géoïde et déviation de la verticale) lors de 100 réalisations

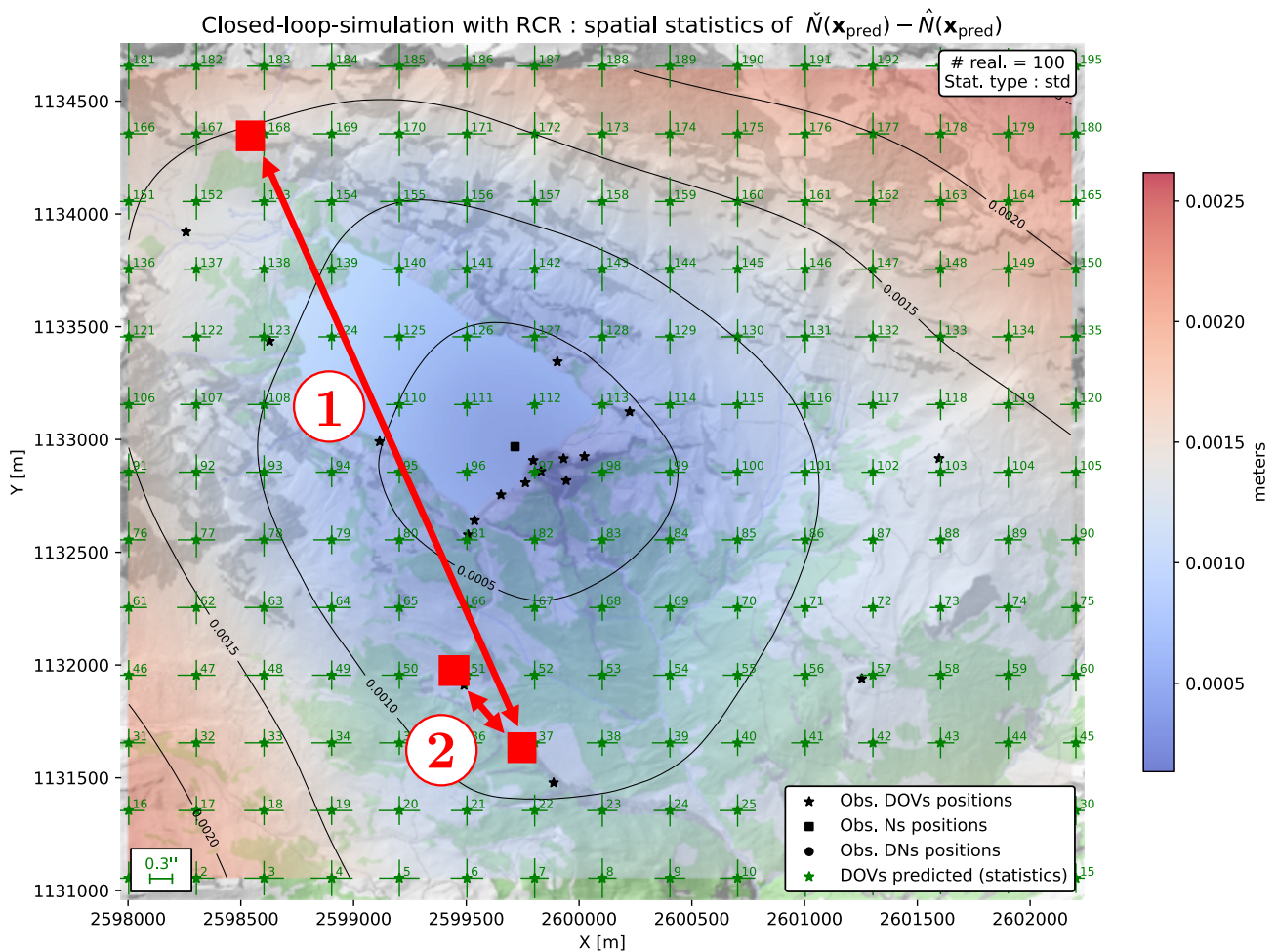


FIGURE 7.31 – Situation des deux exemples donnés dans les figures 7.32 et 7.33

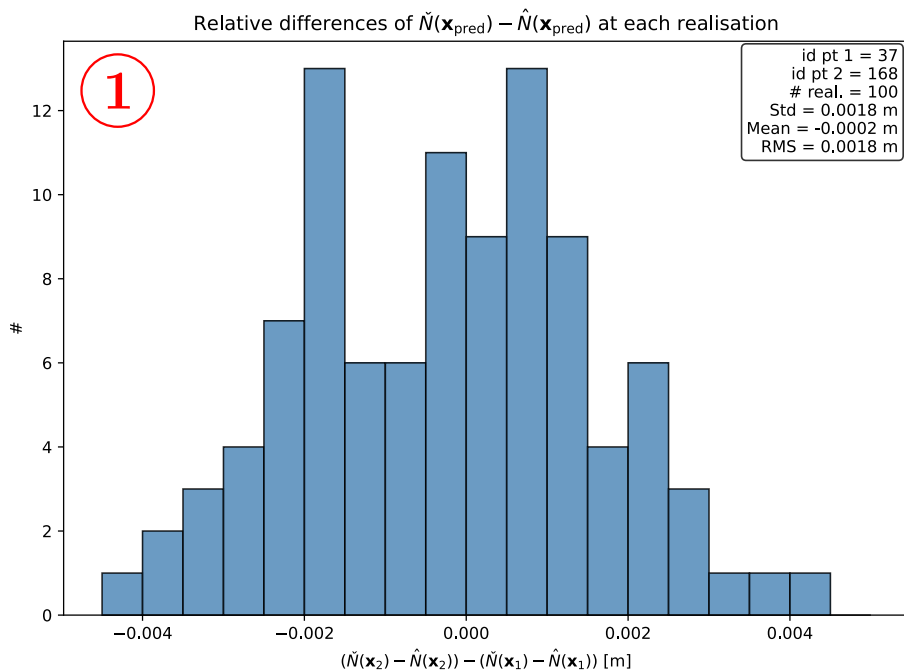


FIGURE 7.32 – Exemple 1 : Différences relatives entre deux positions éloignées lors de 100 réalisations

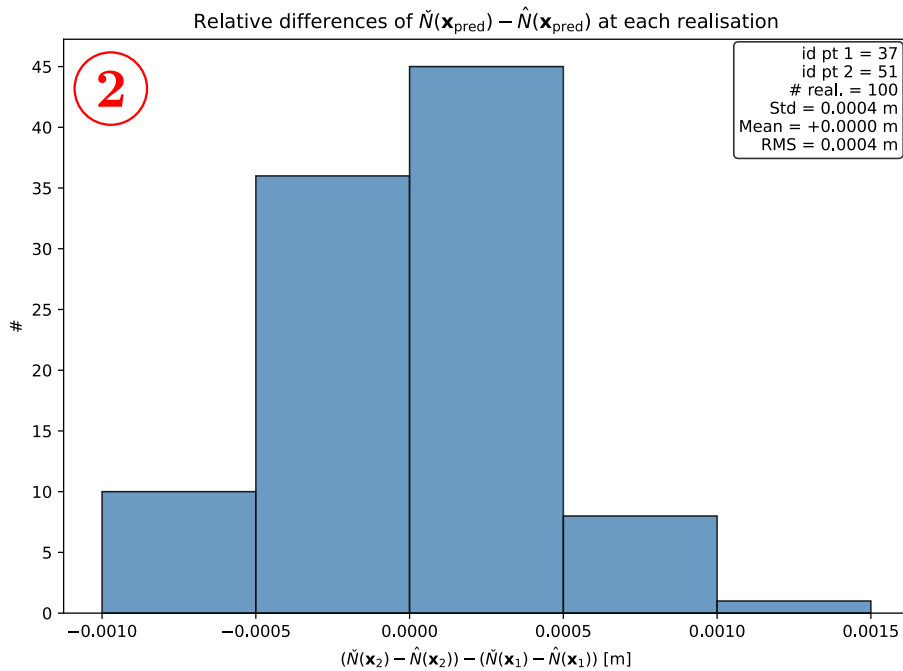


FIGURE 7.33 – Exemple 2 : Différences relatives entre deux positions proches lors de 100 réalisations

Mise en pratique opérationnelle

En complément de la qualification de la détermination présentée ci-dessus, fondée sur des observations effectivement réalisées sur le terrain, il est pertinent d'envisager une approche partant de zéro. Dans ce contexte, une solution idéale consisterait à minimiser le nombre de nuits passées sur site (donc le nombre de stations), tout en garantissant un accès en véhicule aussi facile que possible aux différentes positions d'observation. L'objectif est ainsi d'atteindre des niveaux de précision jugés satisfaisants à l'échelle de la zone du réseau géodésique, à savoir :

- un écart-type sur la cote du géoïde inférieur à 2 mm ;
- un écart-type sur la déviation de la verticale inférieur à 0.5 secondes d'arc.

La figure 7.34 montre l'emplacement de cinq stations de mesures astro-géodésiques accessibles très facilement en véhicule. Par conséquent, si l'opérateur maîtrise correctement l'usage d'un système comme PyDaedalus (DÉLÈZE, 2024), ces observations peuvent être réalisées en une seule nuit dégagée.

La figure 7.35 démontre que ce système d'observation simplifié fournit des résultats remplissant les critères de qualité attendus. En d'autres termes, seulement quelques observations judicieusement placées et réparties peuvent suffire à détecter des effets produits par des masses non-modélisées. Cette pré-analyse peut naturellement être appliquée à n'importe quel site et permet d'optimiser le temps passé sur le terrain en vue de la détermination d'un champ de gravité local de haute précision.

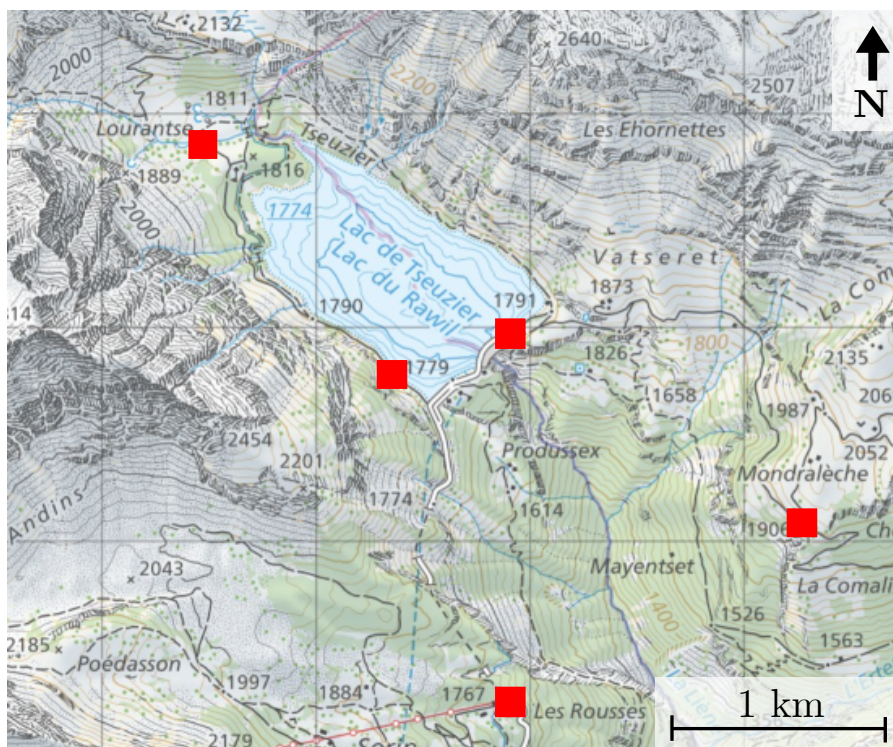


FIGURE 7.34 – Emplacement de cinq stations d’observations astro-géodésiques entièrement accessibles en véhicule

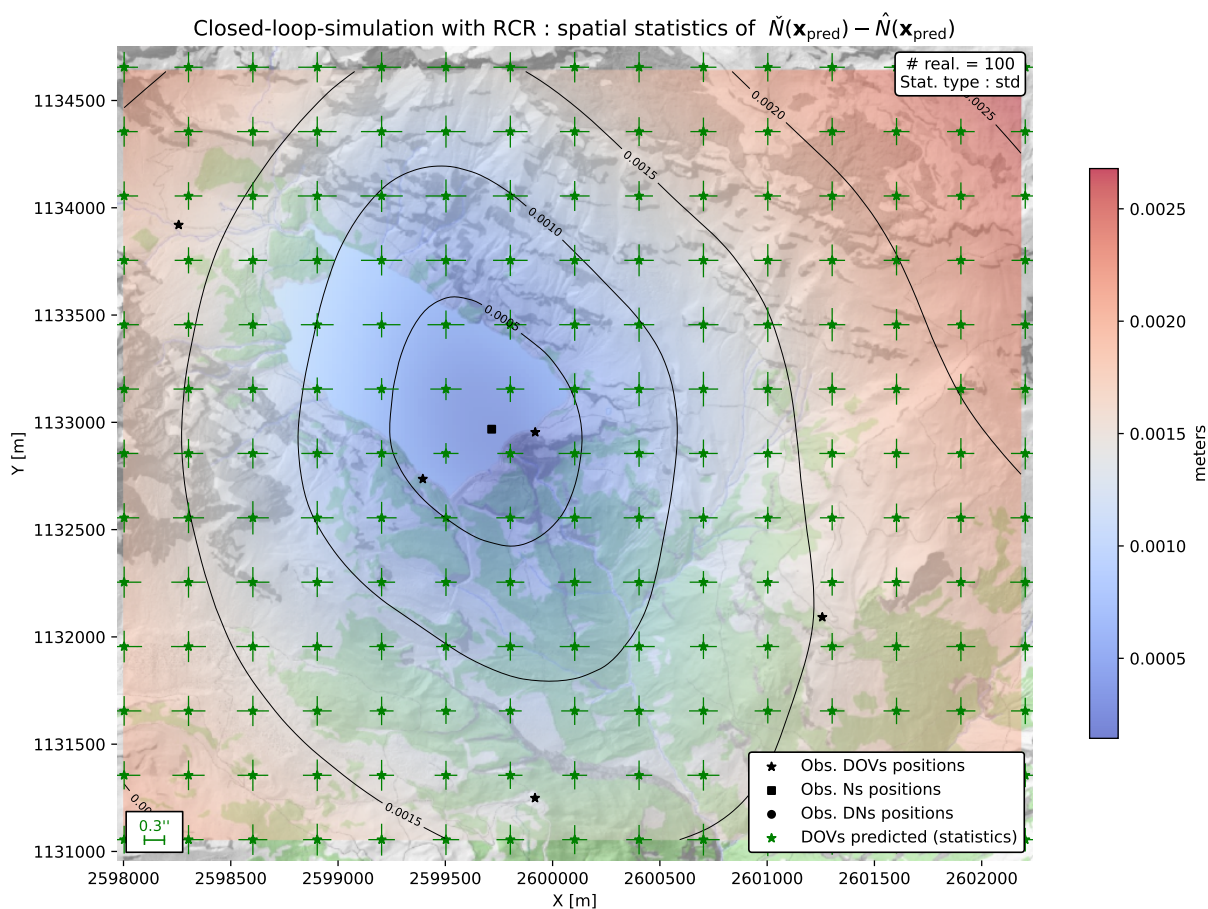


FIGURE 7.35 – Solution optimale : carte de l’écart-type (std) des différences entre les fonctionnelles « vraies » et estimées (cote du géoïde et déviation de la verticale) lors de 100 réalisations

Conclusion et perspectives

Le présent travail avait pour objectif principal de proposer une méthode et des outils permettant de réaliser des déterminations du champ de gravité local de haute précision. Cet objectif est atteint dans la mesure où l'opérateur a la maîtrise de l'ensemble des étapes de la détermination, sans dépendance directe à des modèles externes. L'approche adoptée repose sur une conception modulaire d'outils, offrant une flexibilité d'utilisation selon les besoins et le contexte d'étude. À titre d'exemple, elle permet notamment de générer de manière automatisée un modèle de masse de base de la topographie à destination d'autres chaînes de traitement.

Le second objectif consistait à qualifier de manière rigoureuse les déterminations du champ de gravité ainsi obtenues ou avant même de réaliser des mesures sur le terrain. La littérature scientifique étant relativement limitée sur cet aspect, une réflexion méthodologique approfondie a été menée afin de développer une approche adaptée et opérationnelle. Celle-ci repose sur les simulations en circuit fermé, permettant d'évaluer les performances d'un système d'observations à pouvoir détecter des masses non-modélisées et, ainsi, analyser la précision de la détermination. Ces simulations nécessitent, entre autres, une génération procédurale de contrastes de densité géologique réalisés selon certains procédés attribués habituellement au développement de jeux vidéo.

Finalement, l'ensemble des outils développés a pu être testé dans un cas réel au barrage de Zeuzier. Les résultats obtenus sont particulièrement intéressants dans la mesure où ils ont permis de valider la cohérence globale de la méthodologie proposée dans un contexte opérationnel réel. Les fonctionnelles du champ de gravité estimées présentent des ordres de grandeur réalistes ainsi que des niveaux de précision élevés. Par ailleurs, les outils de simulation ont montré qu'il est possible de réaliser une pré-analyse de la détermination avant toute campagne de terrain. Cette étape permet d'optimiser le nombre et la configuration des observations nécessaires pour atteindre des objectifs de précision donnés, tout en réduisant les coûts opérationnels et financiers.

La mise en œuvre de ces développements, ainsi que leur application à un cas réel, met également en évidence plusieurs points pouvant faire l'objet d'approfondissements ou d'ajustements. Certains choix méthodologiques et certaines hypothèses formulées dans le cadre de ce travail présentent des limites qui pourraient être levées ou atténuées dans des développements ultérieurs. Les perspectives d'amélioration présentées ci-dessous s'inscrivent ainsi dans la continuité de ce travail et visent à étendre ou à affiner les méthodes et outils proposés :

- **Gestion d'un système de coordonnées topocentrique** : dans le cadre de ce travail, les différentes fonctionnelles du champ de gravité sont traitées nativement dans un système de coordonnées projetées, par exemple MN95. Pour des zones d'étude de plus grande envergure, il pourrait toutefois être pertinent de définir un système de coordonnées topocentrique rigoureux, centré sur la zone considérée. Une telle approche permettrait de mieux gérer les effets géométriques liés à la projection, notamment pour les masses lointaines.
- **Fonction de covariance** : le choix de la fonction de covariance ainsi que de ses paramètres constitue un sujet à part entière, pouvant faire l'objet d'une étude spécialisée. Dans le cadre de ce travail, des hypothèses volontairement simples ont été retenues, dans une idée comparable à celle adoptée pour le modèle CHGeo2004 (Gauss-Markov du 3^e ordre).
- **Réseau de cotes géopotentielles** : dans le cadre de déterminations de plus grande envergure, la mise en place d'un réseau de cotes géopotentielles permettrait de disposer directement d'observations de cotes du géoïde, en remplacement d'une approche reposant sur des corrections orthométriques et des différences de cotes du géoïde.
- **Intégration des perturbations de gravité** : ces observations n'ont pas été intégrées directement dans ce travail puisque leur exploitation nécessite un grand nombre de mesures, idéalement organisées sous forme de grille afin de limiter l'introduction de biais. Une telle intégration serait plus adaptée à des modèles régionaux ou nationaux qu'à des études locales de faible emprise.
- **Outils de visualisation et d'export** : des développements complémentaires pourraient porter sur l'enrichissement des outils d'export ainsi que sur la mise en place de visualisations avancées, telles que des coupes verticales ou horizontales des contrastes de densité afin de mieux visualiser les effets sur les fonctionnelles du champ de gravité.
- **Amélioration de la génération procédurale des contrastes de densité** : elle pourrait être étendue sous le niveau de référence $z = 0$ afin de mieux refléter certains effets géologiques plus profonds. De plus, les emplacements des masses ponctuelles pourraient également subir un décalage 3D aléatoire à chaque réalisation afin d'éviter tout biais systématique.
- **Simulation en circuit fermé de la correction orthométrique** : la qualification de la correction orthométrique pourrait être approfondie en définissant la correction « vraie » obtenue par un échantillonnage quasi continu du cheminement, par exemple tous les 2 m. Les positions des intentions d'observations de gravité resteraient limitées, ce qui permet ainsi d'évaluer l'erreur d'omission (GUILLAUME, 2015) induite par une acquisition gravimétrique discrète, typiquement espacée de 100 à 200 m.

Bibliographie

- A10 Outdoor Absolute Gravimeter [Image of the A10 Portable Absolute Gravimeter ; accessed 10 Nov 2025.]. (2017, mars). *Scintrex Ltd.*
- ABBAK, R. A., GOYAL, R., & USTUN, A. (2024). A user-friendly software package for modelling gravimetric geoid by the classical Stokes-Helmert method. *Earth Science Informatics*, 17(4), 3811-3824.
- CHAPELIER, D., & MARI, J.-L. (2000). UNIL, Institut de Géophysique : Cours online de géophysique. <https://www-ig.unil.ch/acc6f.htm>
- DAWNOSAUR. (2025). *How Minecraft generates worlds you want to explore* [Accessed : 2025-10-01]. <https://dawnosaur.substack.com/p/how-minecraft-generates-worlds-you>
- DÉLÈZE, F. (2024, juillet). *Développement d'un système de mesures astro-géodésiques* [Mémoire de Master]. Master conjoint UNIGE–HES-SO en développement territorial, orientation Ingénierie géomatique.
- ESHAGH, M., JIN, S., PAIL, R., BARZAGHI, R., TSOULIS, D., TENZER, R., & NOVÁK, P. (2024). Satellite gravimetry : Methods, products, applications, and future trends. *Earth-Science Reviews*, 253, 104783.
- FORSBERG, R., & TSCHERNING, C. C. (2008). *An overview manual for the GRAVSOFT geodetic gravity field modelling programs* (3rd edition) [First published August 2008, updated August 2014]. National Space Institute (DTU-Space), Denmark et Niels Bohr Institute, University of Copenhagen. https://ftp.space.dtu.dk/pub/RF/gravsoft_manual2014.pdf
- GEOSAT SA [Bureau d'ingénieurs et géomètres officiels, fondé en 2000 ; services en mensuration, géodésie, laser scan, géoinformatique, cartographie 3D. Siège à Sion (CH-1950) et succursale à Savièse (VS), Suisse]. (2020). *GEOSAT SA*. <https://www.geosat.ch/geosat-sa/>
- GUILLAUME, S. (2024). *Éléments de géodésie* [Manuscrit de cours].
- GUILLAUME, S. (2015). *Determination of a Precise Gravity Field for the CLIC Feasibility Studies* [Doctoral Thesis]. ETH Zurich.
- MARTI, U. (2016). swisstopo : Le géoïde de la Suisse 2004 «CHGeo2004». *Définition de la nouvelle mensuration nationale de la Suisse 'MN95', 14ème partie.*
- MAYER-GUERR, T., BEHZADPOUR, S., EICKER, A., ELLMER, M., KOCH, B., KRAUSS, S., POCK, C., RIESER, D., STRASSER, S., SUESSER-RECHBERGER, B., ZEHENTNER, N., & KVAS, A. (2021). GROOPS : A software toolkit for gravity field recovery and GNSS processing. *Computers & Geosciences*, 104864.

- OAKLEY, D., LOISELET, C., COOWAR, T., LABBE, V., & CALLOT, J.-P. (2025). GEOMAPLEARN 1.2 : detecting structures from geological maps with machine learning – the case of geological folds. *Geoscientific Model Development*, 18(4), 939-960.
- PAGIATAKIS, S. D., FRASER, D., MCEWEN, K., GOODACRE, A. K., & VÉRONNEAU, M. (1999). Topographic mass density and gravimetric geoid modelling [Received October 4, 1998 ; accepted August 5, 1999]. *Bollettino di Geofisica Teorica ed Applicata*, 40(3-4), 189-194. https://bgo.ogs.it/sites/default/files/2023-08/bgta40.3.4_PAGIATAKIS.pdf
- PERLIN, K. (1985). An Image Synthesizer. *Proceedings of the 12th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques (SIGGRAPH '85)*, 287-296.
- TOUTI, R. (2025). *Perlin Noise : A Procedural Generation Algorithm* [Accessed : 2025-10-01]. <https://rtouti.github.io/graphics/perlin-noise-algorithm>
- UIEDA, L. (2013). Tesseroids : Forward modeling of gravitational fields in spherical coordinates.
- WIKIPÉDIA CONTRIBUTORS. (2025). *Génération procédurale* [Accessed : 2025-11-20]. https://fr.wikipedia.org/wiki/G%C3%A9n%C3%A9ration_proc%C3%A9durale

Abréviations

API	Interfaces de programmation applicative (requêtes web ou librairies)
DOV	Déviaton de la verticale (Deflection Of the Vertical)
FAC	Correction à l'air libre (Free-Air Correction, $\approx 0.3086 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}^{-1}$)
GNSS	Système de positionnement global par satellites
HEIG-VD	Haute École d'Ingénierie et de Gestion du canton de Vaud
IERS	International Earth Rotation and Reference Systems Service
mgal	Milligal : unité représentant de faibles accélérations de gravité ($1 \text{ mgal} = 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$)
RCR	Remove–Compute–Restore

Table des figures

1	Introduction à la notion de déviation de la verticale	2
2	Introduction à la notion de cote du géoïde	3
3	Exemple d'illustration de l'impact de la déviation de la verticale sur la Tour d'Ivoire (Montreux, CH)	3
4	Exemple de la différence entre une altitude géométrique et une altitude reliée au champ de gravité pour un canal d'irrigation	4
2.1	Somme de l'accélération gravitationnelle terrestre et de l'accélération centrifuge	11
2.2	Potentiel $V(\mathbf{x})$ et accélération gravitationnelle $ \mathbf{g}_{\text{grav}}(\mathbf{x}) $ d'une boule homogène, graphique	15
2.3	Potentiel $V(\mathbf{x})$ et accélération gravitationnelle $ \mathbf{g}_{\text{grav}}(\mathbf{x}) $ d'une boule homogène, vue en plan	15
2.4	Champ de potentiel perturbateur généré par deux masses fictives	18
2.5	Somme des contributions d'accélération gravitationnelle par un ensemble de masses ponctuelles sur une position \mathbf{x}	19
2.6	Détermination du champ gravitationnel d'un polyèdre homogène	20
2.7	Profil topographique avec certaines fonctionnelles du champ de gravité	24
2.8	Gravimètre absolu A10 Micro-g LaCoste (Scintrex). Source de l'image : (« A10 Outdoor Absolute Gravimeter », 2017)	25
2.9	Gravimètre relatif Scintrex CG-6 en pleine campagne de mesures à Zeuzier (VS)	26
2.10	Caméra zénithale CODIAC, ETH Zürich (GUILLAUME, 2015)	27
2.11	Système PyDaedalus monté sur une station totale Leica TS60	27
3.1	Processus général de la création d'un modèle de masse de base de la topographie	29
3.2	Vue élargie des entrées du script (ici, pour le lac de Zeuzier en Valais)	30
3.3	Vue zoomée des entrées du script	31
3.4	Recadrage du nuage de points selon un cercle de rayon R et de centre (c_x, c_y) . .	33
3.5	Sélection des polygones des lacs à excaver	34

3.6	Filtrage des points à l'intérieur d'une polyligne \mathcal{L}_{lac}	35
3.7	Interpolation d'un nuage de points au fond d'un lac à partir de courbes de niveaux	36
3.8	Résumé du processus d'excavation des lacs	36
3.9	Triangulation de Delaunay du nuage de points $\mathcal{P}_{\text{topo+lac}}^{\text{R}}$ multi-résolution	37
3.10	Création du contour inférieur $\partial\mathcal{Q}$	38
3.11	Formation des triangles des murs latéraux	38
3.12	Exemple d'un polyèdre mutli-résolution	40
3.13	Polyèdre avec et sans excavation du volume du lac artificiel de Zeuzier	40
4.1	Schéma de la détermination des fonctionnelles du champ de gravité local	41
4.2	Modèle mixte de la terre	42
4.3	Objectif général du GNSS-nivellement	44
4.4	Exemple d'un cheminement entre un point A et un point B aux abords du barrage de Zeuzier (VS)	47
4.5	Illustration du procédé de lancer de rayons sur un polyèdre de la topographie . .	49
4.6	Schéma de la méthode remove-compute-restore	50
4.7	Modèle d'un ajustement classique d'une droite	53
4.8	Modèle de la collocation par moindres carrés d'une droite	54
4.9	Modèle d'une prédiction avec la collocation par moindres carrés d'une droite . .	54
5.1	Modèle mixte de la Terre pour chaque réalisation	60
5.2	Processus générique d'une réalisation	61
5.3	Coupe : contrastes de densités par polyèdres homogènes	62
5.4	Coupe : contrastes de densités par points massiques (voxels)	62
5.5	Création d'une grille régulière 3D	63
5.6	Coupe : visualisation de la fonction de distance signée SDF	64
5.7	Problématique générale de l'attribution des contrastes de densités $\delta\rho_i$	65
5.8	Distinction entre un bruit blanc (à gauche) et une génération procédurale (à droite)	66
5.9	Passage des points $\mathbf{v}_i^{\mathbb{R}^3} \rightarrow \mathbf{v}_i^{\mathbb{U}^3}$ avec $L_x = 500$ et $L_y = 1000$ [m]. Vue en projection du dessus.	67
5.10	Génération pseudo-aléatoire des vecteurs-gradients	68
5.11	Polynôme de lissage utilisé en pratique dans l'interpolation du bruit de Perlin. .	69
5.12	Interpolation déterministe du bruit de Perlin \mathcal{N} dans \mathbb{U}^3 à partir des vecteurs- gradients pseudo-aléatoires	69

5.13	Passage de \mathbb{U}^3 vers \mathbb{R}^3 démontrant l'impact des longueurs de corrélations L_x, L_y, L_z	70
5.14	Bruit de Perlin simple \mathcal{N} et sa fonction de densité de probabilité (PDF)	71
5.15	Bruit de Perlin \mathcal{N}_{fBm} avec $N_{\text{oct}} = 8, p = 0.5$ et sa fonction de densité de probabilité (PDF)	72
5.16	Bruit de Perlin \mathcal{N}_{fBm} avec $\sigma_{\delta\rho} = 150, N_{\text{oct}} = 8, p = 0.5$ et sa fonction de densité de probabilité (PDF)	73
5.17	Densités apparentes des principaux types de roches	74
5.18	Vue en coupe : bruit de Perlin avec différentes longueurs de corrélation	75
5.19	Vue en coupe : bruit de Perlin avec différents N_{oct} et $p = 0.5$	76
5.20	Deux réalisations de $\delta\mathcal{M}_i$ avec leurs distributions de contrastes de densités $\delta\rho_i$ ainsi qu'une coupe	77
5.21	Processus de la simulation en circuit fermé pour la détermination d'un champ de gravité local	78
5.22	Exemple : déviations de la verticale « vraies » à la surface topographique pour la grille de prédiction et les positions d'observations	80
5.23	Exemple : déviations de la verticale simulées à partir d'observations « vraies »	81
5.24	Exemple : co-géoïde (signal total) estimé	82
5.25	Exemple : géoïde « vrai » et géoïde estimé	83
5.26	Exemple : différence entre le géoïde « vrai » et le géoïde estimé	83
5.27	Processus de la simulation en circuit fermé pour la détermination de la correction orthométrique	85
6.1	Liste des éléments principaux de l'architecture des outils développés	88
6.2	Extrait de l'interface graphique, onglet de la détermination du champ de gravité	90
7.1	Situation géographique de la zone de travail	92
7.2	Vue élargie du canevas planimétrique du réseau géodésique de Zeuzier	93
7.3	Vue élargie du canevas altimétrique du réseau géodésique de Zeuzier	93
7.4	Photo prise lors de la campagne de mesures astro-géodésiques, station « RAWYL »	94
7.5	Carte de la déviation de la verticale (ITRS), évaluée en 18 positions	95
7.6	Déport de la base de gravimétrie absolue n°3213-Noës	96
7.7	Carte des 78 points de mesure gravimétrique	97
7.8	Mesure gravimétrique sur le pilier n°7 (PIL 7)	97
7.9	Carte de la déviation de la verticale avec transformation ITRS \rightarrow MN95	98
7.10	Situation des cheminements de GNSS-nivellement	101

7.11	Aperçu des modèles de masse \mathcal{M}_1 (haut) et \mathcal{M}_2 (bas)	102
7.12	Aperçu du modèle de masse choisi pour la détermination des fonctionnelles du champ de gravité local	103
7.13	Solution astro-géodésique : signal corrélé $\hat{\mathbf{s}}$ (co-géoïde)	106
7.14	Solution astro-géodésique : signal total $\hat{\mathbf{z}}$ (co-géoïde)	106
7.15	Solution astro-géodésique : bruit non corrélé $\hat{\mathbf{n}}$ (co-géoïde)	107
7.16	Solution astro-géodésique : précision absolue du co-géoïde	107
7.17	Solution astro-géodésique : géoïde final et déviation de la verticale à la surface .	108
7.18	Solution astro-géodésique : différence entre le modèle suisse CHGeo2004 et le géoïde final estimé (géoïde et déviation de la verticale à la surface).	108
7.19	Solution combinée : différence avec la solution astro-géodésique pure (restorée) .	110
7.20	Solution combinée : signal corrélé $\hat{\mathbf{s}}$ (co-géoïde)	110
7.21	Solution combinée : bruit non corrélé $\hat{\mathbf{n}}$ (co-géoïde)	111
7.22	Effets générés par le lac de Zeuzier (plein) sur les fonctionnelles du champ de gravité	112
7.23	Différentes vues d'une réalisation de la génération de contrastes de densités . . .	114
7.24	Cheminement PIL 11 \rightarrow PIL 12 : différences entre la correction orthométrique « vraie » et estimée, pour 100 réalisations	115
7.25	Cheminement PIL 11 \rightarrow PIL 13 : différences entre la correction orthométrique « vraie » et estimée, pour 100 réalisations	115
7.26	Carte de l'écart-type (std) des différences entre les fonctionnelles « vraies » et estimées (cote du géoïde et déviation de la verticale) lors de 100 réalisations . .	117
7.27	Histogramme des différences entre la cote du géoïde « vraie » et estimée lors de 100 réalisations	117
7.28	Histogramme des différences entre la composante est-ouest de la déviation de la verticale « vraie » et estimée lors de 100 réalisations	118
7.29	Histogramme des différences entre la composante nord-sud (ξ) de la déviation de la verticale « vraie » et estimée lors de 100 réalisations	118
7.30	Carte de la moyenne (mean) des différences entre les fonctionnelles « vraies » et estimées (cote du géoïde et déviation de la verticale) lors de 100 réalisations . .	119
7.31	Situation des deux exemples donnés dans les figures 7.32 et 7.33	120
7.32	Exemple 1 : Différences relatives entre deux positions éloignées lors de 100 réalisations	120
7.33	Exemple 2 : Différences relatives entre deux positions proches lors de 100 réalisations	121

7.34	Emplacement de cinq stations d'observations astro-géodésiques entièrement accessibles en véhicule	122
7.35	Solution optimale : carte de l'écart-type (std) des différences entre les fonctionnelles « vraies » et estimées lors de 100 réalisations	122

Liste des tableaux

1.1	Récapitulatif de quelques logiciels pour le champ de gravité	7
3.1	Densités utilisées pour le géoïde CHGeo2004	28
3.2	Exemples de paramètres d'entrée	30
3.3	Caractéristiques des géodonnées MNT raster	32
5.1	Paramètres utilisés pour la génération du bruit de Perlin de la figure 5.20	76
6.1	Description de l'usage des bibliothèques externes utilisées (ordre alphabétique)	89
7.1	Observations de la déviation de la verticale en ITRS	96
7.2	Observations de la déviation de la verticale MN95	99
7.3	Résumé du traitement de la session gravimétrique du 06.10.2025 après-midi	100
7.4	Résumé des résultats du pré-traitement du GNSS-nivellement, avec comparaison au géoïde CHGeo2004	101
7.5	Impact du choix d'un modèle de masse sur les observations ΔN	102
7.6	Paramètres utilisés pour la génération procédurale des 100 réalisations de contrastes de densité (via bruit de Perlin)	113

Annexes

Les annexes sont fournies dans un fichier compressé qui accompagne la version numérique du présent rapport. Elles peuvent également être demandées à l'adresse :

matteo.casto@outlook.com.

Annexe A

Code source

L'ensemble du code source est disponible à l'adresse https://gitlab.com/heig-vd-geo/tm-casto/-/tree/master?ref_type=heads ainsi que dans le fichier compressé joint à la version numérique du rapport (dossier `A_code_source`).

A.1 Organisation

Le dossier `code_source` s'organise de la manière suivante :

- `geodata/` : répertoire de géodonnées diverses (rasters, modèles de géoïdes existants, etc.)
- `lib/` : répertoire des modules
 - `gravity_field_functional/` : classes des fonctionnelles du champ de gravité (η , ξ , N , ΔN) ainsi que les outils de visualisation
 - `qgravity_process/` : classes et fichiers nécessaires au lancement d'un processus `QGravity`
 - `stochastic_mass_model/` : classes pour la génération procédurale de contrastes de densité (via bruit de Perlin)
 - `topo_model_auto/` : classes et utilitaires pour la génération automatisée d'un modèle de masse de la topographie, incluant l'excavation des lacs, ainsi que les outils de visualisation
 - `co_geoid.py` : classe de traitement d'un co-géoïde (avec collocation par moindres carrés)
 - `constants.py` : constantes du projet (noms de fichiers, constantes numériques, etc.)
 - `conversion_ply_to_off.py` : fonctions de conversion de fichiers `.off` \leftrightarrow `.ply` (polyèdres fermés)
 - `determination_with_real_obs.py` : classe de délégation pour la détermination des fonctionnelles du champ de gravité à partir d'observations réelles, avec outils de visualisation

- `dovs_transformation.py` : fonctions pour le pré-traitement des observations de déviation de la verticale
- `gravity_field.py` : classe représentant un champ gravitationnel (par exemple import d'un résultat `QGravity` ou opérations d'addition et de soustraction entre champs)
- `interpolation_chgeo2004.py` : classe pour l'interpolation sur le modèle de géoïde suisse `CHGeo2004`
- `orthometric_correction.py` : classes pour le pré-traitement du GNSS-nivellement
- `other_utils.py` : fonctions utilitaires diverses
- `RCR.py` : classe implémentant la méthode complète `remove-compute-restore`
- `regular_grid.py` : fonctions pour la génération d'une grille régulière projetée à la surface d'un polyèdre fermé (positions de prédiction)
- `simulator_ortho_corr.py` : classe pour le simulateur en circuit fermé de la correction orthométrique
- `simulator_RCR.py` : classe pour le simulateur en circuit fermé de la détermination des fonctionnelles du champ de gravité via la méthode `remove-compute-restore`.

- `QGravity/` : répertoire d'installation du logiciel `QGravity`
- `qml_qgis/` : répertoire contenant des fichiers de style `.qml` pour `QGIS` (exports `.shp` avec symbologie)
- `ui/` : répertoire des éléments liés à l'interface graphique
 - `.ui/` : fichiers XML (`.ui`) issus de `Qt Designer`
 - `.py/` : classes pour la gestion des interactions utilisateur et des threads
 - `img/` : répertoire des icônes

- `main_examples.py` : script contenant des exemples de lancement direct des traitements (environnement Python requis : `20251202_TM.yml`)
- `main_ui.py` : script permettant de lancer directement l'interface graphique depuis le code source (environnement Python requis : `20251202_TM.yml`)
- `plots_report.py` : scripts dédiés à la génération des figures utilisées dans le rapport

A.2 Utilisation

Un exécutable de l'interface graphique a été généré et est disponible dans le répertoire `executable/`. Son lancement s'effectue en exécutant le fichier `TM_main_ui/main_ui.exe`. L'interface graphique s'ouvre alors après quelques instants, accompagnée d'une console. En revanche, pour des raisons de compatibilité avec la bibliothèque dépendante `GDAL`, le module dédié à la génération automatique de modèles de masse de la topographie n'est pas encore accessible via cet exécutable.

Le fichier `main_examples.py` contient quelques exemples d'utilisation d'appels aux outils pour tout type d'utilisation souhaitée. Le fichier `20251202_TM.yml` contient l'environnement Python nécessaire pour faire appel à l'ensemble des outils.

Le fichier `main_ui.py` est un simple script ouvrant une instance de l'interface utilisateur (environnement Python spécifique nécessaire)

Annexe B

Modèle de masse de Zeuzier

Le dossier s'organise de la manière suivante :

- `topographie.off` : polyèdre fermé de la topographie avec volume du lac de Zeuzier excavé
- `lac.off` : polyèdre fermé du volume d'eau du lac de Zeuzier (rempli)
- `barrage.off` : polyèdre fermé du volume de béton du barrage de Zeuzier

Annexe C

Déterminations du champ de gravité local à Zeuzier

Le dossier s'organise de la manière suivante :

- `positions_prediction.csv` : fichier des positions de prédiction pour toutes les déterminations (à la surface topographique)
- `solution_astro_pure/` : répertoire contenant les résultats de la détermination du champ de gravité local par 18 stations de mesures astro-géodésiques
 - `obs_dov.csv` : fichier des observations de la déviation de la verticale
 - `obs_cote_geoide.csv` : fichier de l'unique observation de cote du géoïde provenant de CHGeo2004
 - `listing.txt` : listing ASCII détaillé des résultats
 - `determination.det` : binaire d'un objet Python pour recharger les résultats ultérieurement (plots, etc.)
- `solution_combinee/` : répertoire contenant les résultats de la détermination du champ de gravité local par 18 stations de mesures astro-géodésiques combinées à 2 observations de différences de cote du géoïde
 - `obs_dov.csv` : fichier des observations de la déviation de la verticale
 - `obs_dn.csv` : fichier des observations de différences de cotes du géoïde
 - `obs_cote_geoide.csv` : fichier de l'unique observation de cote du géoïde provenant de CHGeo2004
 - `listing.txt` : listing ASCII détaillé des résultats
 - `determination.det` : binaire d'un objet Python pour recharger les résultats ultérieurement (plots, etc.)

Annexe D

Simulations en circuit fermé à Zeuzier

Le dossier s'organise de la manière suivante :

- `positions_prediction.csv` : fichier des positions de prédiction (à la surface topographique) pour toutes les simulations associées à la détermination du champ de gravité
- `contrastes_densites/` : répertoire contenant les 100 réalisations de contrastes de densités générés de manière procédurale (nuage de points XYZ avec attributs)
- `simulation_corr_ortho/` : répertoire contenant les résultats de la simulation en circuit fermé pour le pré-traitement du GNSS-nivellement (correction orthométrique)
 - `listing_sim_11_12.txt` : listing du résultat de la simulation pour le cheminement PIL11→PIL12
 - `listing_sim_11_13.txt` : listing du résultat de la simulation pour le cheminement PIL11→PIL13
 - `listing_sim_11_15.txt` : listing du résultat de la simulation pour le cheminement PIL11→PIL15
- `simulation_determination_astro/` : répertoire contenant les résultats de la simulation en circuit fermé pour la détermination par 18 stations astro-géodésiques réalisées sur le terrain
 - `intention_obs_dov.csv` : fichier des intentions d'observation de la déviation de la verticale
 - `intention_obs_cote_geoide.csv` : fichier de l'intention d'observation de l'unique cote du géoïde provenant de CHGeo2004
 - `simulation.sim` : binaire d'un objet Python pour recharger les résultats ultérieurement (plots, etc.)
 - `toutes_realisations/` : répertoire contenant toutes les déterminations (lisibles chacune comme une détermination classique) de chaque réalisation
- `simulation_determination_preanalyse/` : répertoire contenant les résultats de la simulation en circuit fermé pour la solution de mise en pratique opérationnelle (pré-analyse, 5 stations astro-géodésiques)

-
- `intention_obs_dov.csv` : fichier des intentions d'observation de la déviation de la verticale
 - `intention_obs_cote_geoide.csv` : fichier de l'intention d'observation de l'unique cote du géoïde provenant de CHGeo2004
 - `simulation.sim` : binaire d'un objet Python pour recharger les résultats ultérieurement (plots, etc.)
 - `toutes_realisations/` : répertoire contenant toutes les déterminations (lisibles chacune comme une détermination classique) de chaque réalisation

Annexe E

Canevas du réseau géodésique de Zeuzier

Ces données proviennent du bureau « GEOSAT SA » et ne doivent pas être utilisées hors du contexte de ce Travail de Master. Le dossier s'organise de la manière suivante :

- `canevas_trigonometrie_2020.pdf` : canevas du réseau trigonométrique, vue d'ensemble.
- `canevas_trigonometrie_zoom_2025.pdf` : canevas du réseau trigonométrique, vue agrandie sur la digue et le barrage
- `canevas_nivellements_geom_2020.pdf` : canevas du nivellement géométrique